

CONTRO SENSO

Storie di paradossi,
illusioni
e verità capovolte

Lorenzo Pantieri

Lorenzo Pantieri

Controsenso. Storie di paradossi, illusioni e verità capovolte

Copyright © 2025

✉ lorenzo.pantieri@gmail.com

La citazione è un utile sostituto dell'arguzia.

— Oscar Wilde

Dedicato a tutti gli studenti di matematica.

INDICE

Introduzione	7
1 Vita quotidiana	9
1.1 Meno mangi, più ingrassi	9
1.2 Più dormi, più sei stanco	10
1.3 Se non cerchi, trovi	11
1.4 Gli amici degli amici	11
2 Logica e linguaggio	17
2.1 Il bugiardo	17
2.2 Il mucchio	21
2.3 Gli aerei scomparsi	24
3 Matematica	31
3.1 Infinito	31
3.1.1 Il numero maledetto	31
3.1.2 Achille e la tartaruga	36
3.1.3 Breve storia dell'infinito	38
3.1.4 Viaggio nell'infinitamente piccolo	43
3.1.5 La mappa dell'impero	46
3.1.6 Somme da pazzi	48
3.2 Probabilità e statistica	55
3.2.1 Buon compleanno!	55
3.2.2 Il gioco delle tre porte	58
3.2.3 La scimmia instancabile	60
3.2.4 Quando i numeri ingannano	62
4 Fisica e astronomia	81
4.1 La scoperta dell'acqua calda	81
4.2 Il riscaldamento globale	83
4.3 Perché il cielo è buio?	83
4.4 Il diavoleto di Maxwell	85
4.5 Gemelli diversi	87
4.6 Il gatto di Schrödinger	88
4.7 Intrecci quantistici	90
4.8 Lascia in pace tuo nonno	92
4.9 Dove sono tutti?	93

5	Democrazia	105
5.1	Voti imperfetti	105
5.2	Il seggio conteso	109
5.3	Il <i>gerrymandering</i>	111
5.4	I due gelatai	113
5.5	Diritti negati	114
6	Economia e società	121
6.1	Paradossi economici	121
6.1.1	Acqua e diamanti	121
6.1.2	La felicità	122
6.1.3	L'effetto rossetto	124
6.1.4	Domanda e offerta	124
6.1.5	San Pietroburgo	125
6.2	Paradossi sociali	127
6.2.1	Il dilemma del prigioniero	127
6.2.2	La tolleranza	130
6.2.3	Il traffico	131
6.2.4	Com'è piccolo il mondo!	132
7	Psicologia	145
7.1	Connessi, ma soli	145
7.2	Troppi dati, nessun dato	146
7.3	Era meglio quando era peggio	147
7.4	L'effetto Dunning-Kruger	148
7.5	La mente come medicina	149
8	Percezione	157
8.1	L'area scomparsa	157
8.2	Oggetti impossibili	159
8.3	Illusioni ottiche	162
8.4	L'esperimento delle bacinelle	165
9	Religione	171
9.1	L'onnipotenza	171
9.2	Il libero arbitrio	172
9.3	Il problema del male	173
A	Paradossi lampo	179
B	Cronologia	185
	Bibliografia	187
	Indice analitico	189

INTRODUZIONE

Un paradosso è una verità che sta in piedi sulla testa per farsi notare.

Richard Trudeau

«In questo libro c'è un errore.»

Da questo momento, ti troverai davanti a una piccola magia logica. Supponiamo infatti che nel libro ci sia un errore: allora la frase è vera. Supponiamo invece che non ci siano errori: allora la frase sarebbe falsa. Ma una frase falsa è di per sé un errore, quindi nel libro c'è un errore. In ogni caso, nel libro c'è un errore, e così la frase è vera. Senza inganni, il libro mantiene la sua promessa.

Abbiamo appena visto il paradosso del lettore. I paradossi, del resto, sono l'argomento di questo libro.

Un paradosso, parola che in greco significa “contro l'opinione corrente”, è un fatto o un ragionamento che contraddice l'opinione comune o l'esperienza quotidiana, risultando sorprendente o incredibile.

Gli antichi Greci chiamavano i paradossi *paralogismi* (“oltre la logica”), i medioevali *insolubilia* (“problemi insolubili”), mentre i moderni li chiamano anche *antinomie* (“contro le regole”). C'è stato dunque un cambiamento di prospettiva: da errori di ragionamento i paradossi sono stati rivalutati come dilemmi inspiegabili e poi valorizzati come indizi di problemi di senso comune.

Un paradosso non è altro che una verità che si presenta «a testa in giù» per attirare l'attenzione. Quando incontriamo un paradosso, ci troviamo di fronte a un segnale: c'è qualcosa che ancora non capiamo fino in fondo. Proprio per questo i paradossi ci sfidano, ci costringono a indagare. In matematica, questo processo è particolarmente evidente: quello che inizialmente appare come un enigma insolubile, con il tempo e con l'analisi rigorosa può trasformarsi in un teorema, cioè in una verità chiara e strutturata. La verità, che sembrava capovolta, ritrova allora la sua posizione naturale.

Secondo Borges, i paradossi sono «interstizi di assurdità» inseriti nella realtà per indicarci che è solo un sogno. Se così fosse, gli indizi sarebbero ovunque: siamo circondati da casi paradossali, e la matematica non fa eccezione. Da semplici curiosità logiche, i paradossi possono dunque aprire scenari inaspettati.

Il libro è diviso in sette capitoli che mostrano alcuni paradossi in diversi ambiti della vita e del sapere.

- **Il capitolo 1** esplora i paradossi della vita quotidiana.
- **Il capitolo 2** tratta i paradossi della logica e del linguaggio.
- **Il capitolo 3** presenta i paradossi della matematica.
- **Il capitolo 4** analizza i paradossi della fisica e dell'astronomia.
- **Il capitolo 5** illustra i paradossi del diritto.
- **Il capitolo 6** indaga i paradossi dell'economia e della società.
- **Il capitolo 7** mostra i paradossi della percezione.

Concludono l'opera due appendici.

- **L'appendice A** raccoglie alcune celebri citazioni paradossali.
- **L'appendice B** elenca i paradossi presentati nel libro.

Spero che vi divertiate a leggere questo libro quanto io mi sono divertito a scriverlo.

Lorenzo Pantieri

L'unica costante della vita è il cambiamento.

Eraclito

Ogni giorno la nostra mente ci gioca scherzi: ci sopravvalutiamo, ci blocchiamo davanti a scelte banali, ricordiamo il passato come “era meglio” e ci perdiamo nel flusso infinito di informazioni. In questo capitolo esploreremo alcuni dei fenomeni più curiosi della vita quotidiana: i paradossi alimentari, la nostalgia selettiva del passato, la paralisi decisionale dell'asino di Buridano, la solitudine dietro la connessione costante e il sovraccarico informativo.

Il filo conduttore è chiaro: la percezione inganna e i paradossi sono ovunque. Scopriremo insieme come funzionano e come ci influenzano, spesso senza che ce ne accorgiamo.

1.1 MENO MANGI, PIÙ INGRASSI

In Italia, più di un terzo della popolazione adulta è in sovrappeso e circa una persona su dieci è obesa. A livello mondiale, le percentuali sono simili e continuano a crescere. Sovrappeso e obesità non sono più problemi dei soli Paesi ricchi: ormai colpiscono anche le aree urbane di Paesi a basso e medio reddito e rappresentano una vera emergenza di salute pubblica.

Il motivo della difficoltà nel gestire il peso risiede in parte nella nostra storia evolutiva. I nostri antenati vivevano cacciando e raccogliendo quello che trovavano, e il corpo si è evoluto per accumulare energia nei periodi di abbondanza e sopravvivere ai periodi di carestia. Oggi, invece, il cibo è sempre disponibile, almeno nel mondo occidentale, ma il nostro organismo funziona ancora come migliaia di anni fa: tende a conservare energia anche quando non ce n'è bisogno.

Per contrastare il sovrappeso sono nate le diete ipocaloriche e i prodotti *light*. Tuttavia, le restrizioni troppo severe spesso falliscono

e possono addirittura favorire l'aumento di peso. È il **paradosso della dieta**: meno si mangia, più si rischia di ingrassare. Quando il corpo sente che il cibo scarseggia, infatti, entra in modalità "risparmio energetico": il metabolismo rallenta, la fame aumenta e l'organismo tende ad accumulare grasso.

Ridurre drasticamente le calorie non solo limita l'energia disponibile, ma riduce anche l'apporto di vitamine e minerali, aumentando il rischio di carenze nutrizionali. Inoltre, periodi di forte restrizione alimentare provocano una fame intensa e favoriscono abbuffate, causando il cosiddetto **effetto yo-yo**: quando l'alimentazione torna normale, il corpo trasforma le calorie in eccesso in grasso, facendo recuperare rapidamente i chili persi, con più grasso e meno muscolo.

La chiave non è mangiare meno, ma mangiare meglio: adottare una dieta bilanciata e normocalorica, o leggermente ipercalorica se necessario, combinata con un'attività fisica regolare stimola i muscoli e il metabolismo. Distribuire i pasti in modo equilibrato durante la giornata aiuta a evitare cali di energia e abbuffate, mentre un adeguato apporto proteico preserva la massa muscolare. Affidarsi a un professionista per costruire un piano personalizzato permette di evitare errori comuni e ottenere risultati duraturi. I digiuni drastici e le diete fai da te, al contrario, spesso ottengono l'effetto opposto: il corpo, programmato per sopravvivere, interpreta le restrizioni estreme come una minaccia e rallenta il metabolismo, accumulando più grasso quando l'alimentazione torna normale. Un approccio intelligente, bilanciato e personalizzato, che unisca alimentazione corretta, esercizio fisico e supporto professionale, rimane quindi la strategia più efficace per instaurare abitudini sane e durature.

1.2 PIÙ DORMI, PIÙ SEI STANCO

Secondo vari studi, chi dorme regolarmente più di otto ore tende ad avere un rischio maggiore di sviluppare problemi di salute, in particolare cardiovascolari, rispetto a chi si mantiene tra le sei e le otto ore. Le ricerche indicano che chi supera le nove ore mostra un aumento del rischio intorno al 20%, mentre chi arriva a dormire oltre le dieci ore può avere un incremento del 40%. È il **paradosso del sonno**.

Potrebbe sembrare impossibile, eppure accade a molti: dormire più del necessario non sempre riposa, anzi a volte lascia una sensazione di stanchezza persistente. Questo paradosso ha una spiegazio-

ne fisiologica: l'eccesso di sonno può alterare il ritmo circadiano, interferire con le fasi profonde del sonno e generare una sorta di "intorpidimento biologico". La mente e il corpo si aspettano un ciclo regolare: quando viene prolungato o spezzato, il risultato può essere sorprendentemente opposto a quello atteso.

1.3 SE NON CERCHI, TROVI

Ti è mai capitato di perdere qualcosa, tipo le chiavi, e di cercarla ovunque senza successo? Controlli tasche, borse, giubbotti, eppure niente. La frustrazione cresce e continui a cercare, concentrandoti sempre di più. Poi, all'improvviso, quando smetti di pensarci e la tua mente si distrae con altro, l'oggetto riappare davanti a te, spesso in un posto semplicissimo, completamente visibile, ma che prima ti era sfuggito.

Il fenomeno, che potremmo chiamare il **paradosso della ricerca**, mostra una verità semplice: smettere di concentrare tutte le energie sulla ricerca libera attenzione e riduce la frustrazione, permettendo alla mente di notare ciò che prima non vedeva. È un paradosso quotidiano, che tutti sperimentano almeno una volta: smettere di cercare può essere la via più veloce per trovare.

1.4 GLI AMICI DEGLI AMICI

Studi scientifici hanno dimostrato che, sui social network, le persone che seguiamo tendono ad avere mediamente più follower di noi, e i nostri amici hanno più amici di noi. Questo fenomeno è una conseguenza del **paradosso dell'amicizia**, proposto nel 1991 dal sociologo Scott Feld: i nostri amici hanno in media più amici di noi.

La **figura 1** ci aiuta a capire il paradosso. Anna è amica di Bob, che è amico anche di Carla e Dino. Dino oltre che di Bob è amico di Carla. In tutto Anna ha un amico, Bob ne ha tre, Carla e Dino ne hanno due ciascuno: sono otto legami di amicizia per quattro persone, quindi ogni persona ha in media due amici. Se si considera però quanti amici hanno gli amici di ogni persona, si vede che gli amici di Carla (Bob e Dino), hanno rispettivamente tre e due amici. I due amici di Carla hanno quindi cinque amici in tutto (non importa che si sovrappongano). La stessa cosa vale per Dino. Anna ha un solo amico, Bob, che ha tre amici. Bob invece ha tre amici, che messi insieme hanno cinque amici in tutto. Gli "amici degli amici", quindi, sono in

tutto 18. Poiché i legami di amicizia totali sono otto, per calcolare quanti sono in media gli “amici degli amici” bisogna dividere 18 per 8, che fa 2,25, più dei due amici che hanno in media Anna, Bob, Carla e Dino. Il motivo è che Bob, che ha più amici della media, viene contato più volte negli “amici degli amici”, alzando la media.

La ragione del paradosso è che i nostri amici non sono un campione rappresentativo della popolazione generale: è più probabile che una persona con tanti amici sia tra i nostri amici rispetto a una persona con pochi amici. È lo stesso motivo per cui le persone che vediamo in palestra ci sembrano più in forma di noi: è più probabile incontrare in palestra una persona che ci passa molto tempo. Oppure il motivo per cui ci può sembrare che i nostri compagni abbiano avuto più relazioni di noi: è più probabile che una persona con una vita sentimentale attiva sia disposto a iniziare una relazione con noi, rispetto a una persona che ha avuto pochi partner.

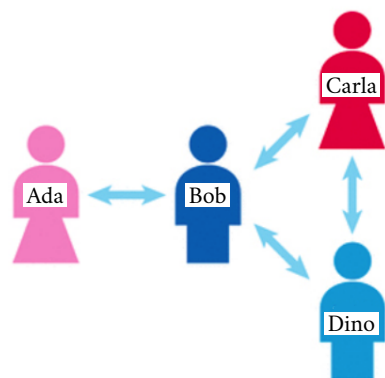


Figura 1: I nostri amici hanno in media più amici di noi.

L'analisi del paradosso dell'amicizia implica che gli amici di individui scelti a caso sono inclini ad avere una centralità maggiore della media. Questa osservazione è stata usata come un modo di prevedere e rallentare il corso di una pandemia, usando questo processo di selezione casuale per scegliere individui da immunizzare a monitorare per infezioni evitando il bisogno di una computazione complessa della centralità dei nodi nella rete.

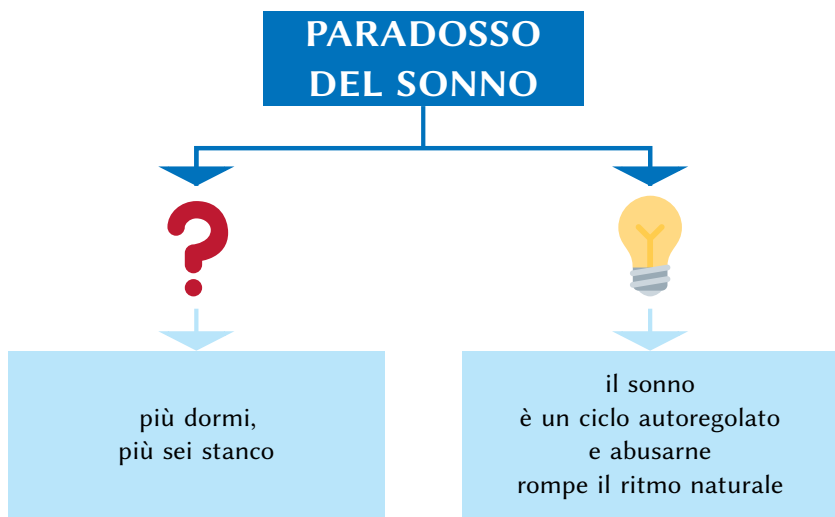
MAPPA DI SINTESI

VITA QUOTIDIANA



MAPPA DI SINTESI

VITA QUOTIDIANA



MAPPA DI SINTESI

VITA QUOTIDIANA



MAPPA DI SINTESI

VITA QUOTIDIANA



2

LOGICA E LINGUAGGIO

È difficile stare zitti se non si ha nulla da dire.

Malcom Margolin

Il linguaggio è uno strumento potente, ma scivoloso. È impreciso, ambiguo, pieno di trappole. Può far sembrare sensate frasi che non lo sono, o creare problemi dove non ce ne sono.

La logica, invece, ha una struttura più solida. Può essere sfidata, ma ha in sé gli strumenti per rispondere. Il paradosso del bugiardo, per esempio, non è un fallimento della logica: è un'occasione per indagare il concetto di verità e i suoi limiti.

Nelle prossime pagine troverai alcuni paradossi classici, in cui il linguaggio si ingarbuglia e la logica è chiamata a fare ordine. Dal bugiardo al mucchio, dalle domande sull'onnipotenza al libero arbitrio, ogni esempio mostra quanto sia sottile il confine tra ciò che si può dire e ciò che ha davvero senso dire.

2.1 IL BUGIARDO

Nel *Vangelo secondo Giovanni* si narra che, durante il processo, Poncio Pilato chiese a Gesù: «Che cos'è la verità?», e poi se ne andò senza aspettare risposta. Il suo comportamento lascia supporre che il governatore romano pensasse che la domanda non avesse senso, o almeno che non avesse una risposta.

Eppure, che ci sia qualche verità è indubbio: infatti se tutto fosse falso, questa sarebbe già una verità. Ma possiamo definire con precisione che cos'è la verità? La logica moderna ha dimostrato che la risposta alla domanda è negativa, e ci è riuscita cercando di dipanare proprio il paradosso del bugiardo.

Le prime avvisaglie del paradosso risalgono a Epimenide di Creta (secolo -VI), che disse: «i cretesi sono bugiardi». Di per sé questa

affermazione è innocua, ma la si può rendere insidiosa intendendo per “bugiardo” qualcuno che dica sempre il falso, e per “i cretesi” tutti i cretesi. In questo caso Epimenide intendeva dire: «tutti i cretesi dicono sempre il falso». Questa frase non può essere vera, perché altrimenti Epimenide stesso sarebbe un cretese che a volte non dice il falso. Allora la frase deve essere falsa, cioè qualche cretese deve dire a volte qualche verità, e la cosa finisce qui (non è detto che quel cretese debba essere proprio Epimenide, e se anche lo fosse, non è detto che quella verità debba essere proprio la frase in questione).

Eubulide di Mileto (secolo -IV) andò oltre la formulazione di Epimenide, chiedendosi che cosa succede quando qualcuno dice: «io sto mentendo». Se quanto afferma è vero, allora sta mentendo. Se è falso, allora non sta mentendo. In entrambi i casi si ha una contraddizione. Questo non è più solo un rompicapo, ma un vero e proprio paradosso: cioè un'affermazione che va «oltre l'opinione comune», e risulta dunque sorprendente o inattesa.

Il paradosso del bugiardo ha avuto nei secoli varie peripezie filosofiche e letterarie, e se ne possono dare molte versioni (figura 2). Una è riportata da Aulo Gellio nelle *Notti attiche*. Protagora, celebre sofista, aveva un allievo, Evatlo, che non poteva pagarlo subito. I due decisero che l'onorario sarebbe stato saldato solo dopo la prima vittoria in tribunale di Evatlo. Terminati gli studi, però, Evatlo non iniziò la professione e si rifiutò di pagare. Protagora lo citò in giudizio, ed Evatlo si difese da sé. Evatlo obiettò: «Se vinco non devo pagare per la sentenza, e se perdo non devo pagare perché non ho ancora vinto alcuna causa». Protagora replicò: «Se vinci hai comunque vinto la tua prima causa e devi pagare, e se perdi la sentenza ti obbliga a pagare». Chi aveva ragione?

Un'altra versione del paradosso del bugiardo è riportata da **Miguel de Cervantes** nel *Don Chisciotte*. Si narra che quando Sancho Panza era governatore di Barataria, gli si presentò il caso di un uomo arrivato a un ponte, che la legge permetteva di attraversare solo dopo aver



Figura 2: Il naso di Pinocchio si allunga se e solo se Pinocchio mente. Pinocchio dice la verità?

Il paradosso del comma 22, variante del paradosso di Buridano, è stato formulato da Joseph Heller: «Chi è pazzo può chiedere di essere esentato dalle missioni di volo, ma chi lo fa non è pazzo».

dichiarato il motivo per cui si voleva attraversarlo: se la dichiarazione era veritiera, il permesso era accordato. Se era mendace, la pena era l'impiccagione. L'uomo aveva dichiarato di voler attraversare il ponte solo per essere impiccato in base alla legge.

Giovanni Buridano diede una versione del paradosso che oggi formuleremmo semplicemente così

La frase seguente è vera.
La frase precedente è falsa.

Presa singolarmente, nessuna delle due frasi precedenti è contraddittoria, ma il loro insieme invece lo è. Infatti:

- Se la prima frase è vera, allora deve esserlo anche la seconda. Ma se la seconda è vera, allora la prima è falsa. Quindi, se la prima frase è vera, risulta falsa, il che è assurdo.
- Se la prima frase è falsa, allora anche la seconda deve essere falsa. Ma se la seconda è falsa, allora la prima è vera. Quindi se la prima frase è falsa, allora è vera, il che è nuovamente assurdo.

Escher tradusse in immagine lo spirito del paradosso del bugiardo con la litografia del 1948 *Mani che disegnano* (figura 3): l'opera rappresenta due mani che si disegnano a vicenda. L'effetto è un enigma irrisolvibile: quale mano disegna l'altra?

Nel 1902 Bertrand Russell riformulò il paradosso dividendo gli insiemi di oggetti in due classi: gli insiemi che non appartengono a sé stessi (per esempio l'insieme delle tazze da tè, che non è una tazza da tè) e gli insiemi che appartengono a sé stessi (per esempio l'insieme dei concetti astratti, che è un concetto astratto). Poi considerò l'insieme R di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi. Il problema è: R appartiene o no a sé stesso? Se sì, allora è uno degli insiemi che non appartengono a sé stessi. E se no, allora dovrebbe appartenere a R , e dunque a sé stesso.

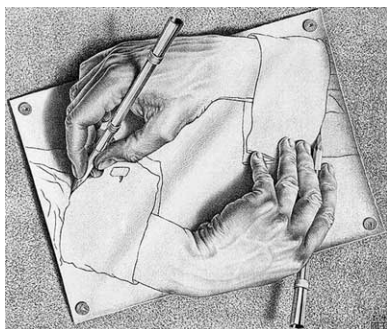


Figura 3: *Mani che disegnano.*

Una variante del paradosso del bugiardo è il paradosso dell'esame a scelta multipla: «Scegliendo a caso una risposta a questa domanda, qual è la probabilità che sia corretta?», con opzioni A: 25%, B: 0%, C: 50%, D: 25%. Se la risposta fosse 25% (A o D), ci sarebbero due risposte corrette, quindi la probabilità sarebbe 50%. Se fosse 50% (C), c'è solo una risposta del genere, quindi la probabilità sarebbe 25%. Se fosse 0% (B), la probabilità sarebbe comunque 25%. In nessun caso la risposta indicata è la probabilità effettiva.

L'argomento di Russell divenne famoso perché si applicava non più al linguaggio naturale, la cui coerenza poteva essere messa in dubbio, ma alla matematica: sul finire dell'Ottocento essa era stata infatti riformulata in modo da fondarla solo sulla nozione di insieme, e il paradosso minacciava la coerenza stessa della matematica.

Nel 1908 Kurt Grelling diede una forma linguistica al paradosso del bugiardo, dividendo gli aggettivi del linguaggio in due classi: gli **autologici**, che hanno la proprietà da essi descritta, e gli **eterologici**, che non ce l'hanno. Per esempio, "polisillabico" è autologico, "monosillabico" eterologico. La domanda è: di che tipo è l'aggettivo eterologico? Se è autologico, ha la proprietà che descrive e quindi è eterologico. Se è eterologico, non ha la proprietà che descrive e quindi non è eterologico.

Nel 1918 lo stesso Russell riformulò il suo paradosso in una delle forme più note. Questa volta si dividono le persone di un villaggio tra quelle che si radono da sole e quelle che vanno invece dal barbiere: chi rade un barbiere che rada tutte e sole le persone che non radono sé stesse?

Non c'è una sola soluzione al paradosso del bugiardo, ma ci sono diversi modi per affrontarlo.

- Un primo approccio è accettare il paradosso come un limite del linguaggio. In questo caso non si cerca tanto di risolverlo, quanto di circoscriverlo: il paradosso è un segnale che il nostro modo di esprimerci ha confini che non possiamo superare senza inciampare.
- In alternativa, si può adottare una logica a tre valori di verità: vero, falso e indeterminato. In questa prospettiva, che risale allo stesso Eubulide, la frase «questa frase è falsa» non è né vera né falsa, ma semplicemente indeterminata.
- Oppure si può mettere in discussione l'autoreferenzialità. Secondo questa posizione, che risale ad Aristotele, frasi come «questa frase è falsa» non hanno senso: non sono "ben formate", quindi non dovrebbero essere considerate vere proposizioni e dunque non ha senso attribuire loro un valore di verità.

Nei sistemi formali, come la matematica, una risposta più profonda è stata data da Alfred Tarski, con il suo celebre **teorema dell'indefinibilità**. In breve, Tarski ha dimostrato che all'interno di un sistema coerente e sufficientemente espressivo non è possibile definire il concetto di "verità" usando solo gli strumenti del sistema stesso.

*Nel 1930 a
Königsberg
Hilbert dichiarò
che ogni
problema
matematico ha
una soluzione, o
che si può
dimostrare che
non è risolvibile,
rifiutando l'idea
di problemi
indecidibili.*

Riprendendo un'intuizione di Guglielmo di Occam, Tarski introduce la distinzione tra il **linguaggio**, la lingua in cui si parla, e il **meta-linguaggio**, la lingua di cui si parla. Consideriamo per esempio il rapporto tra l'inglese e l'italiano quando parliamo in italiano di una parola inglese: in questo caso, l'italiano è il metalinguaggio, mentre l'inglese è il linguaggio.

Il teorema di Tarski afferma che la verità non può essere definita nel linguaggio, cioè all'interno del sistema, ma solo nel metalinguaggio, all'esterno. La frase «sto mentendo» mescola i due livelli: si pone all'esterno del sistema (il verbo *mentire* si spiega non nella frase stessa, ma in un altro livello), ma è espressa all'interno del sistema. Per evitare paradossi come quelli del mentitore bisogna evitare frasi del genere.

Si potrebbe pensare che il paradosso del bugiardo non abbia rilevanza nella vita quotidiana, perché nessuna persona sensata direbbe mai cose del tipo «questa frase è falsa», ma non è così. A questo proposito, lo psicologo Gregory Bateson ha introdotto il concetto di **doppio vincolo**: una situazione in cui una persona riceve un ordine che deve essere disubbidito per poterlo rispettare e, al contempo, obbedito per poterlo disubbidire. Un esempio classico è l'ordine «sii spontaneo!», che genera una contraddizione intrinseca. Secondo Bateson, l'esposizione prolungata a doppi vincoli di questo tipo può portare alla schizofrenia.

Una volta riconosciuti, i doppi vincoli emergono in molteplici ambiti dell'attività umana: dall'educazione (dove per insegnare autonomia e spontaneità si richiedono dipendenza e obbedienza) al diritto (dove, per esempio, si vieta per legge la rinuncia alla libertà, come nel Codice civile svizzero, o si punisce l'autolesionismo, come nei codici militari).

Hilbert sosteneva che la matematica è una costruzione della mente umana e che quindi gli enti matematici si scoprono. Secondo Platone, invece, la matematica descrive una realtà oggettiva e gli enti matematici si inventano. Queste due concezioni, formalismo e realismo, sono entrambe diffuse fra i matematici.

2.2 IL MUCCHIO

Immaginiamo di trovarci davanti a un mucchio di sabbia. Se togliamo un granello dal mucchio, abbiamo ancora un mucchio. Eliminiamo un altro granello: è ancora un mucchio. Togliamo un altro granello e poi ancora uno: il mucchio diventerà sempre più piccolo, finché rimarrà un solo granello di sabbia. In quale momento quel mucchio iniziale non è più un mucchio? Questo paradosso, attribuito a Eubulide di Mileto (secolo -IV), ha molte varianti, come il paradosso

del calvo: posto che la perdita di un solo capello non rende calvi, quand'è che un uomo può dirsi calvo?

Una variante del paradosso del mucchio è il **paradosso della nave di Teseo**, formulato da Epicarmo nel secolo -VI. Si racconta che la nave in legno su cui viaggiò il mitico eroe greco Teseo fosse conservata nel corso degli anni, sostituendone le parti che via via si deterioravano. Arrivò dunque un momento in cui tutte le parti usate in origine per costruirla erano state sostituite, benché la nave stessa conservasse la sua forma originaria. La nave di Teseo si è conservata o no? È ancora la stessa nave o le somiglia solo?

Nel 1969 James Cargile riformulò il paradosso nel modo seguente. Dato che un girino diventa una rana, se filmiamo la crescita di un girino dovremmo ottenere due fotogrammi successivi, nel primo dei quali si vede ancora il girino, mentre nel secondo si vede già la rana.

Il paradosso si presenta perché abbiamo a che fare con concetti come quello di “mucchio” che per loro natura sono vaghi: un granello di sabbia non è certamente un mucchio, mentre il Cerro Blanco in Argentina, la duna di sabbia più grande del mondo, certamente lo è. Ma quand'è che un insieme di granelli di sabbia può dirsi un mucchio?

Per risolvere il paradosso potremmo dichiarare insensati i ragionamenti che coinvolgano concetti vaghi. Questa soluzione, però, è insoddisfacente perché capita spesso di usare concetti come “alto” e “basso” (un millimetro in più o in meno non fa diventare alti o bassi), “grande” e “piccolo”, “maturo” e “immaturo”, e così via.

In alternativa, possiamo fissare arbitrariamente un livello di soglia sopra il quale si verifica una certa condizione (per esempio, «essere un mucchio») e sotto il quale invece no. Per esempio, possiamo stabilire che un mucchio di sabbia deve essere formato da almeno 10 mila granelli. Questa soluzione, però, presenta degli aspetti paradossali: per esempio, 9999 granelli di sabbia non sarebbero un mucchio, ma se aggiungessimo un solo granello avremmo un mucchio. È lo stesso problema che si presenta quando si traduce il concetto (vago) di “giuridicamente maturo” con quello (preciso) di “maggioranno”, che a sua volta si caratterizza con la proprietà di avere almeno diciotto anni: una persona a cui manca un solo giorno per essere maggioranno non può votare.

Una terza soluzione consiste nell'usare una logica diversa da quella classica, come per esempio la logica *fuzzy* (“sfumata”, in inglese),

*Quando la logica
fuzzy iniziò a
diffondersi,
alcuni
matematici la
criticarono
duramente e
presero di mira il
suo ideatore,
Lotfi Zadeh.
Divertito, Zadeh
replicò con una
battuta: «I miei
colleghi credono
che la logica
fuzzy sia vaga.
In realtà, è la
loro logica
classica a essere
troppo precisa: il
mondo non
conosce gli 0 e
gli 1, conosce i
grigi».*

inventata nel 1973 da Lotfi Zadeh. Mentre nella logica classica un'affermazione può essere solo vera o falsa, nella logica *fuzzy* un'affermazione può essere oltre che vera o falsa, anche parzialmente vera, o parzialmente falsa (figura 4). Se il valore di verità di un'affermazione vera è uguale a 1 e di un'affermazione falsa è uguale a 0, nella logica *fuzzy* il valore di verità di un'affermazione parzialmente vera è un numero compreso tra 0 e 1.

La logica *fuzzy* fa parte delle cosiddette logiche polivalenti, estensioni della logica classica in cui sono presenti più valori di verità rispetto ai canonici *vero*, *falso*. Le prime logiche polivalenti furono proposte negli anni Venti del

Novecento da Emil Post e da Jan Łukasiewicz, con tre tre valori di verità: *vero*, *falso*, *problematico*.

Per esempio, nella logica *fuzzy* l'affermazione «un neonato è giovane» ha valore 1 (è vera), «un anziano è giovane» ha valore 0 (è falsa), mentre «un diciottenne è giovane» può avere valore 0,8 e «un sessantenne è giovane» può avere valore 0,2. Rispetto alla logica classica, la logica *fuzzy* è più simile al modo di ragionare degli uomini, che ammette sfumature e può passare da un concetto all'altro gradualmente.

La logica *fuzzy* permette di risolvere il **paradosso dell'impiccagione a sorpresa**, reso celebre dal matematico Martin Gardner nel 1963. Si racconta che il *conquistador* spagnolo Francisco de Orellana fu condannato a morte. Per l'efferatezza dei suoi crimini, il giudice pronunciò una sentenza singolare: l'impiccagione sarebbe avvenuta a sorpresa, in un giorno imprecisato della settimana successiva, da lunedì a sabato. Dopo averci pensato su, Francisco concluse che non ci sarebbe stata alcuna impiccagione. Infatti l'impiccagione non poteva avvenire di sabato: se Francisco fosse arrivato a venerdì sera ancora vivo, avrebbe subito capito che l'esecuzione sarebbe avvenuta il giorno dopo, e addio sorpresa. E non poteva essere di venerdì, perché giovedì sera lo avrebbe saputo, e così a ritroso fino a lunedì. Lunedì mattina, tuttavia, Francisco fu impiccato: e fu una sorpresa. Chi aveva ragione? Francisco o il giudice?



Figura 4: Mentre nella logica classica una frase può essere solo vera o falsa, nella logica *fuzzy* una frase può essere, oltre che vera o falsa, anche parzialmente vera (o parzialmente falsa).

Negli anni '80 del Novecento un'azienda giapponese costruì la prima lavatrice a logica fuzzy. Grazie a sensori e regole "sfumate", la lavatrice determinava da sola se un carico era molto sporco o poco sporco, adattando il lavaggio di conseguenza. I pubblicitari la presentarono così: «Lava in modo umano, non digitale». Fu un successo, e la logica fuzzy entrò nella vita quotidiana.

Il paradosso ha diverse varianti. Una di esse fa riferimento a un esame a sorpresa annunciato da un professore ai suoi alunni per la settimana successiva: con lo stesso ragionamento, gli alunni concludono che non ci sarà alcun esame.

Il paradosso può essere risolto inquadrandolo nella logica *fuzzy*: Dal punto di vista della logica classica, infatti, la sentenza del giudice è contraddittoria: se l'impiccagione fosse del tutto inattesa, infatti, non bisognerebbe avvisare il condannato. Inoltre, tanto più breve è il periodo entro cui deve aver luogo l'impiccagione, quanto più la sentenza è contraddittoria. Al limite, se il periodo si riduce a un solo giorno, la sentenza si traduce nella seguente contraddizione: «Domani sarai impiccato, ma tu non lo saprai». Dato che la sentenza del giudice non può essere pienamente rispettata, il condannato dovrebbe aspettarsi di essere impiccato in un giorno qualunque.

La logica *fuzzy* ha trovato importanti applicazioni pratiche: alcuni sistemi di allarme per uffici e abitazioni e persino alcuni elettrodomestici d'uso comune la impiegano nei loro sistemi di controllo.

2.3 GLI AEREI SCOMPARSI

Nel 1942 gli Stati Uniti erano entrati in guerra da qualche mese, dopo l'attacco a sorpresa sferrato dai Giapponesi alla base navale di Pearl Harbor. Gli aerei statunitensi, come quelli alleati della Royal Air Force britannica, tornavano dalle missioni crivellati di colpi di proiettile, decimati dalla contraerea e dagli aerei della Luftwaffe, l'aviazione militare tedesca. I fori erano concentrati in diverse regioni degli aerei: nelle ali, nella fusoliera (la parte principale dell'aereo che contiene il carico) e nella coda (**figura 5**).

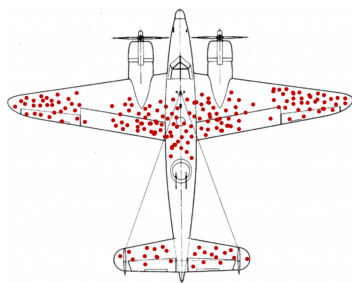


Figura 5: Quale parte dell'aereo va rinforzata?

I militari, che volevano rinforzare le aree degli aerei più inclini a essere colpite, si rivolsero a un gruppo di scienziati della Columbia University a New York, incaricati dal governo americano per sostenere le attività dell'esercito. Tra i membri del gruppo c'era Abraham

Wald, un matematico ebreo ungherese fuggito dall'Austria tre anni prima, durante l'occupazione nazista.

I militari erano incerti se bisognasse rinforzare di più le ali, la fusoliera o la coda, ma Wald rispose che bisognava invece rinforzare il motore. Wald si era reso conto che il motivo per cui non c'erano colpi nella zona del motore era che gli aerei colpiti lì non tornavano alla base, ma precipitavano. La presenza di fori di proiettile nelle ali, nella fusoliera e nella coda degli aerei tornati provava che gli aerei potevano sopportare danni in quelle zone, ma non al motore. La soluzione di Wald fu messa in pratica e gli aerei militari che si salvarono aumentarono sostanzialmente.

L'errore logico individuato da Wald, definito **pregiudizio di sopravvivenza**, si presenta quando, nella valutazione di una situazione, ci si concentra solo sulle storie delle persone o delle cose che "ce l'hanno fatta" e si trascura tutto il resto.

Per esempio, se un ristoratore decide di aprire un ristorante in una città contando sul fatto che lì ci sono molti ristoranti di successo, potrebbe essere incappato in un pregiudizio di sopravvivenza. Potrebbe cioè ignorare che quei ristoranti di successo da lui scelti come esempi siano la parte "sopravvissuta" di un insieme molto più ampio. Se in quella città la maggioranza dei ristoranti fallisce nel primo anno, quei fallimenti non sono visibili ma dovrebbero rientrare nelle valutazioni del ristoratore. Il che non è facile perché, come scrive Nassim Taleb, «il cimitero dei ristoranti falliti è molto silenzioso».

Analogamente, sostenere che «non si fanno più le cose come si facevano una volta» (intendendo che una volta si facevano meglio), può essere frutto di un pregiudizio di sopravvivenza, perché si considerano solo gli esemplari che hanno superato la "prova del tempo", ma si ignorano tutti quelli che sono andati distrutti.

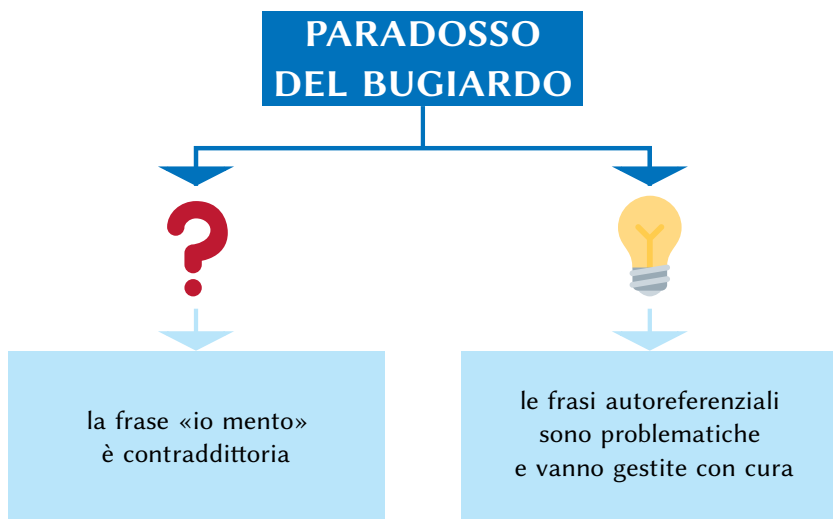
Si è vittima del pregiudizio di sopravvivenza anche quando si cita l'interruzione degli studi universitari da parte di miliardari come Bill Gates o Mark Zuckerberg e si trae la conclusione che essi debbano le loro fortune al fatto di non aver seguito un percorso convenzionale. Questo genere di conclusioni non considerano tutte quelli che hanno abbandonato gli studi e non sono diventati miliardari.

La storia mostra che la logica è spesso essenziale per risolvere un problema. E la matematica insegna a essere logici: come diceva Hermann Weyl, «la logica è l'igiene con cui il matematico mantiene le sue idee robuste e in salute»

Il pittore El Greco è famoso per le sue figure allungate. Qualcuno ha ipotizzato che questo stile fosse dovuto a una disfunzione visiva. Ma se fosse stato così, quello che vedeva gli sarebbe apparso allungato, e lo avrebbe dipinto "normale" sulla tela. Le figure allungate sono dunque frutto di una scelta artistica consapevole. Un ragionamento semplice smaschera l'errore.

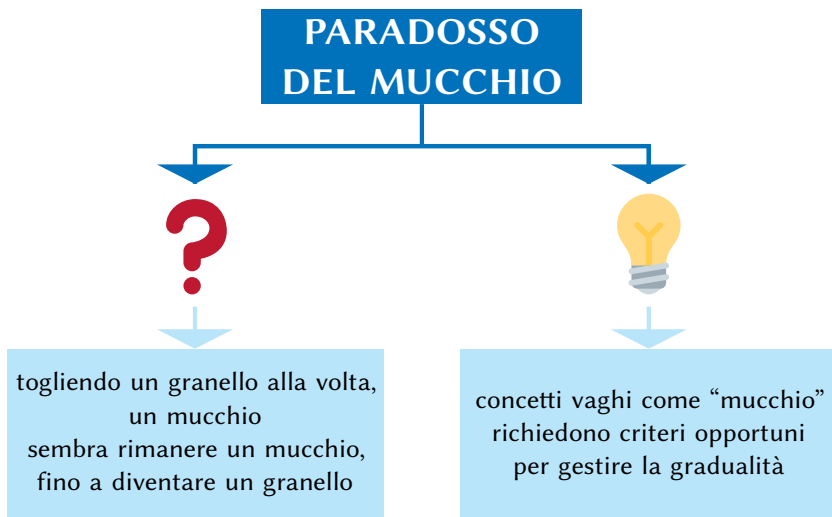
MAPPA DI SINTESI

LOGICA E LINGUAGGIO



MAPPA DI SINTESI

LOGICA E LINGUAGGIO



MAPPA DI SINTESI

LOGICA E LINGUAGGIO

PARADOSSO DEGLI AEREI SCOMPARSI



i danni visibili
sugli aerei tornati
non indicano
le zone più critiche



le zone davvero vulnerabili
sono quelle non danneggiate
negli aerei che rientrano

3

MATEMATICA

La matematica è piena di paradossi, eppure non mente mai.

anonimo

La matematica è un linguaggio che descrive il mondo, ma sa anche sorprenderci con paradossi, giochi di logica e intuizioni che mettono alla prova il nostro modo di pensare. In questo capitolo esploreremo alcuni dei suoi territori più affascinanti: l'infinito, con i suoi enigmi e i suoi protagonisti, e la probabilità, che ci aiuta a capire l'imprevedibile e a scoprire quanto spesso l'intuizione ci inganni.

3.1 INFINITO

L'infinito è una delle idee più vertiginose della matematica: sfugge alla misura, ma obbedisce a regole precise. Da Zenone a Cantor, da Hilbert a Borges, seguiremo il filo di un concetto che unisce filosofia, logica e immaginazione.

3.1.1 Il numero maledetto

Secondo una leggenda tramandata da Giamblico di Calcide, un giorno Pitagora passò davanti all'officina di un fabbro e si accorse che il suono dei martelli battuti sulle incudini era a volte armonioso, e a volte sgradevole. Incuriosito, entrò nell'officina, esaminò i martelli e scoprì che quelli che producevano suoni consonanti avevano tra loro rapporti di peso ben precisi.

Tornato a casa, Pitagora volle verificare se una regola simile valesse anche per strumenti a corda, come la lira. Sperimentò tendendo corde (pare fossero nervi di bue) e scoprì che due suoni risultano consonanti quando le lunghezze delle corde stanno tra loro in rapporti numerici semplici. Per esempio:

- una corda che emette la nota *do*, se dimezzata, produce il *do* all'ottava superiore;
- se ridotta ai $\frac{2}{3}$ della lunghezza, produce un *sol* (intervallo di quinta);
- se accorciata a $\frac{3}{4}$, suona un *fa* (intervallo di quarta).

Il nome dell'intervallo (ottava, quinta, quarta) dipende dal numero di note comprese nell'intervallo stesso: per esempio, *do-sol* è una quinta perché include cinque note: *do, re, mi, fa, sol*.

Dato che le leggi dell'armonia che andava scoprendo coinvolgevano solo numeri razionali, Pitagora formulò la celebre massima: «tutto è (numero) razionale». Questa frase non va intesa in senso generico, ma letterale: il mondo, secondo Pitagora, può essere descritto attraverso rapporti numerici razionali. Del resto, sia in greco (*lógos*) sia in latino (*ratio*), la parola usata per indicare la “ragione” significava anche “rapporto”, a testimonianza di un legame profondo tra pensiero, numero e armonia.

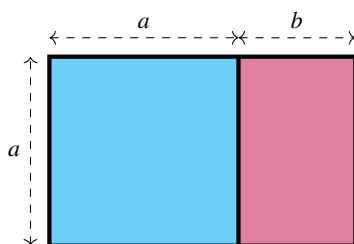


Figura 6: Un rettangolo aureo.

La visione pitagorica fu messa in crisi al **primo paradosso della storia**: l'esistenza di grandezze tra loro **incommensurabili**. Nel secolo –VI, infatti, i pitagorici scoprirono un fenomeno geometrico interessante. Se prendiamo un rettangolo e gli tagliamo via il quadrato costruito sul lato minore, otteniamo un rettangolino, che in genere sarà di forma diversa da quello di partenza. In un unico caso otteniamo un rettangolino che ha esattamente la stessa forma: quando i lati del rettangolo di partenza, e dunque anche quelli del rettangolino di arrivo, sono nel cosiddetto “rapporto aureo”, appunto definito in tal modo (**figura 6**).

Dato che il rettangolino di arrivo mantiene la stessa forma, lo stesso procedimento può essere ripetuto. Si ottiene un rettangolino ancora più piccolo, sempre in proporzione aurea, **e così via all'infinito**. Il procedimento non ha mai fine e dimostra geometricamente che il rapporto aureo è irrazionale, nel senso che non esiste un'unità di misura che stia un numero esatto di volte in entrambi i lati (**figura 7**).

Infatti, se il rettangolo di partenza avesse i lati misurabili con numeri interi, lo stesso varrebbe per il rettangolo di arrivo. Questo perché uno dei lati del nuovo rettangolino è esattamente uguale al lato minore del rettangolo iniziale, che è intero, e l'altro lato sarebbe la differenza tra i due lati del rettangolo iniziale,

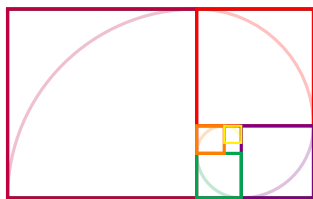


Figura 7: Un rettangolo aureo.

Se ripetiamo il procedimento con gli altri rettangoli e consideriamo i lati dei rettangoli così costruiti, otteniamo una successione strettamente decrescente e infinita di interi positivi, il che è assurdo.

In formule, se $a + b$ e a sono le misure dei lati del rettangolo di partenza, allora:

$$(a + b) : a = a : b$$

Se indichiamo con φ il rapporto fra i lati del rettangolo di partenza, uguale al rapporto fra i lati a e b del rettangolino di arrivo, dall'equazione precedente si ottiene l'equazione:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

O, equivalentemente:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Delle due soluzioni dell'equazione, quella positiva è l'unica accettabile, perché φ è per definizione un numero positivo. Quindi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Dire che i lati di un rettangolo aureo sono incommensurabili significa che non esiste alcuna unità di misura comune capace di misurarli entrambi esattamente: qualunque unità misuri un lato, non potrà misurare l'altro. Fu una scoperta sconvolgente per i pitagorici, convinti che tutta la realtà potesse essere espressa tramite rapporti numerici razionali.

Attraverso la proporzione aurea l'irrazionale fece la sua comparsa nella matematica, minando il credo pitagorico secondo cui «tutto è (numero) razionale».

Il rapporto aureo entra in gioco anche nella geometria del pentagono regolare. Si dimostra infatti che il punto di intersezione fra due diagonali divide ciascuna di esse in due segmenti in rapporto aureo. La diagonale e il lato del pentagono sono incommensurabili. La dimostrazione geometrica dell'incommensurabilità fra il lato e la diagonale è visualizzabile tracciando le diagonali del pentagono, che formano una cosiddetta "stella pitagorica", con un nuovo pentagono al centro: si innesca così un regresso all'infinito, in cui pentagoni e stelle si alternano telescopicamente (figura 8).

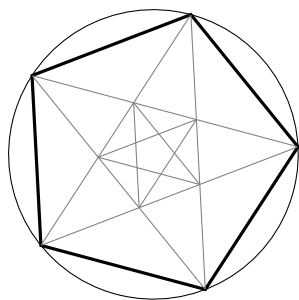


Figura 8: Il rapporto aureo è legato alla geometria del pentagono regolare.

Probabilmente i pitagorici si imbattono per la prima volta nell'incommensurabilità nel rettangolo aureo, poi nel pentagono e infine nel quadrato, la cui dimostrazione geometrica è più complessa.

L'idea che alcune grandezze non potessero essere espresse come rapporti di numeri interi fu percepita come una minaccia ai fondamenti stessi della matematica. Il "principio di indeterminazione" geometrico che ne derivava è tradizionalmente attribuito a Pitagora, ma la sua divulgazione è fatta risalire a Ippaso di Metaponto, intorno al -500. Secondo la tradizione, Ippaso pagò la rivelazione con la radiazione dall'ordine, la simbolica erezione di una tomba in vita e, infine, la morte per naufragio per intervento divino.

Molti secoli dopo, Richard Dedekind definì rigorosamente i numeri reali, trasformando il paradosso pitagorico in una dimostrazione: il numero aureo φ è irrazionale. Ma l'eco di quella crisi sopravvive ancora oggi nelle parole stesse «irrazionale» e «assurdo». La prima deriva da ratio, cioè «rapporto», e significa letteralmente «non esprimibile come frazione»; la seconda da surdus, nome con cui si indicavano le radici quadrate di interi non quadrati, e significa «assurdo».

L'importanza che i pitagorici diedero al rettangolo aureo, e alle sue proporzioni, ha ragioni estetiche: la forma che si ottiene è piacevole ed equilibrata, perché non è né troppo simmetrica, come quella di un quadrato, né troppo asimmetrica, come quella di una strisciolina molto allungata. Questa forma divenne nei secoli l'ideale della pro-

La stella a cinque punte, che i pitagorici usavano come segno di riconoscimento, ha avuto una lunga storia di trasformazioni. Nel Novecento è comparsa in una veste del tutto diversa: colorata di rosso, è diventata il simbolo dei movimenti comunisti e rivoluzionari, dall'Unione Sovietica alla Cina di Mao, fino alle Brigate Rosse in Italia.

porzione artistica. Lo sostenne fra gli altri Luca Pacioli, che nel 1509 scrisse *La proporzione divina*, un'opera di matematica illustrata nientemeno che da Leonardo da Vinci. Nel 1948 Le Corbusier elaborò il Modulor (letteralmente, “modulo d'oro”), una scala di proporzioni basata sul rapporto aureo. Anche Piet Mondrian usò il rettangolo aureo nelle sue opere.

Il rapporto aureo si trova non solo nelle opere umane, ma anche in natura. Il legame aureo tra la matematica e la natura è mediato dalla famosa **successione di Fibonacci**, scoperta da Leonardo Fibonacci nel XIII secolo per descrivere la crescita di una popolazione di conigli.

La successione inizia con 1, 1 e prosegue aggiungendo ogni volta la somma dei due numeri precedenti: 1, 1, 2 (perché $1 + 1 = 2$), 3 (perché $2 + 1 = 3$), 5, 8, 13, 21, 34, 55 e così via. In formule:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

dove F_n è l' n -esimo termine della successione, n è un intero positivo e $F_0 = F_1 = 1$.

Più si va avanti e più il rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi si avvicina al rapporto aureo. Infatti possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

Se indichiamo con ℓ il limite del rapporto di due numeri consecutivi di Fibonacci quando n tende all'infinito, allora:

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$$

da cui si ottiene $\ell = \varphi$.

La successione di Fibonacci appare spesso in natura. Per esempio, quasi tutti i fiori hanno tre o cinque o otto o tredici o ventuno o trentaquattro o cinquantacinque petali. Questi numeri ritornano nella disposizione delle foglie e dei rami di molte piante, il che spiega, fra l'altro, perché i quadrifogli sono così rari rispetto ai trifogli. Nelle scaglie delle pigne, nelle protuberanze dell'ananas, nei semi di girasole e nei pistilli sulle corolle dei fiori si possono individuare disposizioni a spirale, in senso orario e antiorario: il numero delle spirali orarie e il numero delle spirali antiorarie sono due numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

«La geometria ha due tesori: il teorema di Pitagora, che possiamo paragonare all'oro, e la sezione aurea, una pietra preziosa.»
— Keplero

Il termine rapporto aureo fu introdotto per la prima nel 1835 da Martin Ohm, fratello di Georg Ohm che ha formulato le leggi dell'elettrotecnica, mentre l'uso della lettera φ fu introdotto nel 1909 da Mark Barr, dall'iniziale dello scultore greco Fidia che l'avrebbe usata per scolpire le sculture del Partenone.

3.1.2 Achille e la tartaruga

Uno dei paradossi più antichi e famosi della storia è il paradosso di Achille e la tartaruga, formulato da Zenone di Elea venticinque secoli fa. Zenone mise in scena la prima **gara matematica** della storia: quella tra Achille “più veloce”, l’eroe greco dalla leggendaria velocità, e la tartaruga, un animale dalla lentezza proverbiale.

L’argomento di Zenone è il seguente. Se Achille concede alla tartaruga un qualsiasi vantaggio, non riuscirà mai a raggiungerla: deve prima percorrere la distanza iniziale, ma nel frattempo la tartaruga avanza di un nuovo tratto, che Achille dovrà colmare, e così via all’infinito (figura 9).

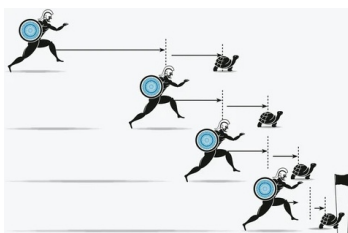


Figura 9: Achille e la tartaruga.

Nel racconto *La perpetua corsa di Achille e della tartaruga* (1947), lo scrittore Jorge Borges descrive così il paradosso:

Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all’infinito, in modo che Achille corre per sempre senza raggiungerla.

Zenone formulò il paradosso per difendere le tesi del suo maestro Parmenide, che sosteneva che il movimento fosse un’illusione. In altri paradossi, in effetti, Zenone spiega che **il movimento è impossibile**: se lo spazio fosse divisibile all’infinito, infatti, prima di aver raggiunto un certo punto Achille dovrebbe coprire la metà della distanza che lo separa dal traguardo, poi la metà della metà della distanza rimanente, e così via all’infinito, senza poter mai completare il processo. Insomma, Achille e la tartaruga non potrebbero neppure spostarsi lungo il percorso di gara.

Diogene il Cinico osservò che il paradosso «si risolve camminando» (*solvitur ambulando*). Aristotele invece confutò l’argomento sostenendo che Zenone immaginava qualcosa che non esiste, cioè un

Achille sono i primi personaggi kafkiani della letteratura», dirà Borges. E Italo Calvino si ispirò al paradosso della freccia per il suo racconto *Ti con zero*.

Il paradosso della freccia si risolve con il calcolo infinitesimale, introdotto da Newton e Leibniz nel XVII secolo, secondo cui i singoli istanti di tempo non sono nulli, ma infinitamente piccoli. Quindi in un istante di tempo infinitamente piccolo la freccia si muove percorrendo uno spazio infinitesimo.

Il fascino dei paradossi di Zenone ha travalicato i limiti della matematica. Lewis Carroll, l'autore di *Alice nel paese delle meraviglie*, immaginò che a corsa finita Achille abbia finalmente raggiunto la tartaruga, ma questa lo sottoponga a un nuovo dilemma, che riguarda non più il movimento, ma le regole del ragionamento. L'argomento di Zenone, infatti, può essere usato a sostegno della tesi che niente si può provare e niente si può definire. Ogni prova si deve infatti basare su qualcosa di non provato, che si deve provare a sua volta, e così via. Analogamente, ogni definizione si deve infatti basare su qualcosa di non definito, che si deve definire a sua volta, e così via.

I paradossi di Zenone hanno ispirato libri e film. Tra i libri c'è il *best seller* di Douglas Hofstadter *Gödel, Escher, Bach* (1979), in cui Achille e la tartaruga si accapigliano su argomenti matematici. Tra i film spicca *Achille e la tartaruga* (2008), del regista giapponese Takeshi Kitano, in cui un artista cerca disperatamente di raggiungere il successo che sembra sempre a portata di mano ma si rivela irraggiungibile. E così, da rompicapo logico la gara tra Achille e la tartaruga diventa la metafora di un dramma esistenziale.

3.1.3 Breve storia dell'infinito

I paradossi di Zenone sono solo alcuni dei tanti paradossi dell'infinito, un tema da cui Borges era letteralmente ossessionato. **«C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica: parlo dell'Infinito»,** scriveva nelle *Altre inquisizioni* del 1952.

L'infinito è infatti fonte inesauribile di paradossi, come sottolineava il matematico Bernard Bolzano, che diceva: «Non tutti i paradossi matematici riguardano il concetto di infinito, ma la maggior parte sì», diceva Bernard Bolzano.

Aristotele riteneva l'infinito un principio «divino, immortale e indistruttibile», da maneggiare con cura, e Giordano Bruno **finì addirittura sul rogo** per aver sostenuto che esistono infiniti mondi,

teorizzando dunque un infinito che non era quello unico e assoluto tradizionalmente attribuito a Dio. In matematica, l'infinito è ovunque: nel numero di elementi degli insiemi numerici o dei punti di una figura geometrica, oppure nascosto nei concetti basilari dell'analisi. E non finisce mai di stupire.

Le radici storiche dell'infinito sono antichissime. La prima volta che l'idea di infinito fece capolino nella storia del pensiero fu nel secolo –VI, quando il filosofo Anassimandro identificò il principio della realtà con l'*apeiron*, “illimitato”. L'infinito ricomparve nei paradossi sul moto di Zenone di Elea.

L'infinito fu accettato dai Greci in senso “potenziale” e non “attuale”, cioè solo come un processo interminabile e mai completamente realizzato. Per esempio, negli *Elementi* Euclide non parlò mai di rette (infinite), ma solo di segmenti prolungabili a piacere.

Il primo progresso nella storia dell'infinito attuale lo fece nel XIII secolo Duns Scoto, che introdusse un ragionamento che solo dopo secoli sarebbe stato riconosciuto corretto. Il suo obiettivo era dimostrare che le circonferenze non possono essere formate da punti, e lo fece provando che altrimenti tutte le circonferenze ne avrebbero lo stesso numero: cosa apparentemente assurda, perché punti aventi le stesse dimensioni e nella stessa quantità dovrebbero produrre circonferenze della stessa lunghezza. La dimostrazione consisteva nel muovere due circonferenze qualunque una sull'altra, in modo da farle diventare concentriche, e poi nel notare che il raggio, girando, mette in **corrispondenza biunivoca** ciascun punto di una circonferenza con uno e un solo punto dell'altra, e viceversa.

Analogamente, gli insiemi delle sedie e delle persone che stanno in una stanza hanno la stessa grandezza se nessuna sedia è vuota, e ogni persona è seduta, occupa un solo posto e non lo

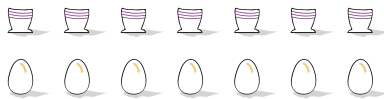


Figura 11: Uova e portauova in corrispondenza biunivoca.

condivide: possiamo infatti stabilire una corrispondenza che associa a ogni persona una sedia e a ogni sedia una persona (**figura 11**).

Nel 1638 Galileo trovò un analogo aritmetico del paradosso geometrico di Scoto. Questa volta, erano due qualunque insiemi infiniti di interi ad avere lo stesso numero di elementi, invece che due circonferenze. Per esempio, ci sono tanti numeri pari quanti numeri interi, perché ogni numero ha un unico doppio e ogni numero pari

ha un'unica metà. In un insieme infinito, non è dunque vero che «il tutto è maggiore della parte». Questa proprietà paradossale verrà usata nel 1872 da Richard Dedekind per **definire** gli insiemi infiniti: un insieme è infinito se ha almeno un sottoinsieme con cui è in corrispondenza biunivoca.

Per mostrare la differenza tra gli insiemi finiti e quelli infiniti, David Hilbert nel 1924 propose il seguente **paradosso dell'hotel**. Immaginiamo un hotel con infinite stanze, tutte occupate. Intuitivamente, sembra impossibile accogliere nuovi ospiti. Eppure, grazie alla natura infinita dell'hotel, si dimostra che è sempre possibile trovare posto per tutti, indipendentemente dal numero di nuovi arrivati.

Se arriva un nuovo ospite, infatti, l'albergatore può semplicemente spostare tutti i clienti nella stanza successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, e così via), liberando la stanza 1 per il nuovo arrivato. Se invece arrivano n nuovi ospiti, ciascun cliente viene spostato in una stanza il cui numero è aumentato di n rispetto a quella attuale (dalla 1 alla $n + 1$, dalla 2 alla $n + 2$, e così via), rendendo disponibili le prime n stanze per i nuovi ospiti. Anche se arrivano infiniti nuovi ospiti, l'hotel riesce ad accoglierli. In questo caso, ogni cliente già presente viene trasferito nella stanza con numero doppio rispetto a quella attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, e così via), liberando così tutte le stanze dispari per i nuovi arrivati.

Tornando a Galileo, le sue osservazioni furono accolte come nuovi paradossi dell'infinito, da aggiungersi a quelli di Zenone come ottime ragioni per continuare a rimuoverlo dalla matematica e dalla filosofia.

In ogni caso, sembrava che nell'aritmetica dell'infinito tutto si mescolasse in un unico contenitore, e John Wallis propose dunque nel 1655 di usare un unico simbolo per indicarlo: il famoso ∞ , ottenuto completando una ω , l'ultima lettera dell'alfabeto greco, che si trova appunto “in fine”.

Nel 1816 il geologo John Farey trovò un modo naturale di “mettere in fila” i numeri razionali. Basta infatti ordinarli in base alla somma di numeratore e denominatore, per esempio così:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{1} \quad \dots$$

Qualche decennio più tardi, nel 1874, Georg Cantor sviluppò questa idea per dimostrare che i numeri razionali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con gli interi. Il suo metodo consiste nel disporre le frazioni in una scacchiera (numeratori da un lato,

denominatori dall'altro) e percorrerla lungo una linea spezzata diagonale, come mostra la **figura 12**. Se cancelliamo tutte le frazioni che non sono ridotte ai minimi termini, otteniamo una successione che contiene ogni numero razionale positivo una e una sola volta.

$\frac{1}{1} \rightarrow 0$	$\frac{2}{1} \rightarrow 1$	$\frac{3}{1} \rightarrow 4$	$\frac{4}{1} \rightarrow 5$	$\frac{5}{1} \rightarrow 10$	$\dots$
$\frac{1}{2} \rightarrow 2$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2} \rightarrow 6$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{1}{3} \rightarrow 3$	$\frac{2}{3} \rightarrow 7$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dots$
$\frac{1}{4} \rightarrow 8$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\dots$
$\frac{1}{5} \rightarrow 9$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Figura 12: Il metodo di Cantor dimostra che i numeri razionali sono tanti quanti gli interi.

Il fatto che i numeri razionali possano essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri interi prova che nell'infinito non si annulla solo la differenza fra la parte e il tutto, ma anche fra il discreto e il denso. E dato che i razionali sono una specie di “versione bidimensionale” degli interi, in cui ogni frazione corrisponde a una coppia formata da numeratore e denominatore, nell'infinito si annulla anche la differenza tra l'unidimensionale e il bidimensionale. E non sopravvive nemmeno la differenza tra positivo e negativo, perché è facile numerare i numeri relativi, alternando quelli di segno contrario:

0 1 -1 2 -2 3 -3 ...

«**Lo vedo, ma non ci credo**», scrisse Georg Cantor a Dedekind nel 1887.

Tutto sembrava dunque confermare l'unicità dell'infinito, ma mancavano ancora all'appello i numeri reali. Anzi, non esistevano neppure, perché nessuno era riuscito a definirli sensatamente, dopo la scoperta degli irrazionali. Il primo che ci riuscì fu Richard Dedekind, che ebbe l'intuizione giusta nel 1858, anche se la pubblicò solo nel 1872.

Dedekind osservò che gli irrazionali venivano sempre trattati attraverso approssimazioni razionali, e concluse che doveva essere possibile definirli interamente in base al loro effetto sui razionali. Per esempio, la radice di 2 separa i razionali in due gruppi: quelli con quadrato minore e quelli con quadrato maggiore di 2. Dedekind identificò l'irrazionale con questa separazione stessa, chiamata "sezione", anziché considerarla solo un effetto. Così gli irrazionali vengono ridotti a particolari suddivisioni dell'insieme dei razionali. Dato che i numeri razionali sono esprimibili come rapporti tra interi, Kronecker poté affermare: «**I numeri naturali sono opera di Dio, il resto è opera dell'uomo**».

A questo punto ci si può chiedere se i numeri reali siano anch'essi tanti quanti i razionali e gli interi, o se invece si sia ottenuto qualcosa di sostanzialmente più "numerico". Nel 1873 Cantor diede una risposta sorprendente: è impossibile mettere in corrispondenza biunivoca i numeri reali con i numeri interi, perché qualunque numerazione ne lascia sempre fuori qualcuno.

La dimostrazione è di una semplicità diabolica. Cantor scoprì che nessuna lista di numeri reali compresi tra 0 e 1 può essere completa. la lista non contiene, infatti, almeno un numero: quello il cui sviluppo decimale si scrive iniziando con una qualunque cifra diversa dalla prima cifra del primo numero, proseguendo con una qualunque cifra che sia diversa dalla seconda cifra del secondo numero, e così via. Il nuovo numero non può essere il primo della lista, perché le loro prime cifre sono diverse, non può essere il secondo, perché le loro seconde cifre sono diverse, e così via.

In formule, una lista che comprendesse tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 avrebbe questo aspetto:

$$\begin{array}{l} 0, \textcolor{red}{a}_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \dots \\ 0, \ a_{21} \ \textcolor{red}{a}_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ \dots \\ 0, \ a_{31} \ a_{32} \ \textcolor{red}{a}_{33} \ a_{34} \ \dots \\ 0, \ a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ \textcolor{red}{a}_{44} \ \dots \\ 0, \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \end{array}$$

Basta definire un nuovo numero reale tra 0 e 1, le cui cifre decimali b_n sono diverse da quelle a_{nn} che compaiono sulla diagonale:

$$0, b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ \dots$$

Questo nuovo numero è diverso da tutti i numeri della lista. Dunque, la lista di partenza non comprendeva tutti i numeri reali tra 0 e 1:

in altre parole, nessuna lista del genere può essere completa. Dato che non si possono numerare i numeri decimali tra 0 e 1, a maggior ragione l'insieme dei numeri reali non è numerabile.

L'argomento precedente è noto come **argomento diagonale di Cantor**. L'argomento è stato usato in numerose varianti: per esempio, Russell lo usò per dimostrare l'incoerenza della teoria ingenua degli insiemi, mentre Turing lo usò per dimostrare l'indcidibilità del problema della fermata.

A questo punto, Cantor disse che due insiemi hanno lo *stesso numero* di elementi se si possono mettere in corrispondenza biunivoca. E che un insieme ha *meno* elementi di un altro se il primo si può mettere in corrispondenza biunivoca con una parte del secondo, ma non con il tutto. I risultati precedenti si possono allora riformulare dicendo che gli interi sono tanti quanti i razionali, ma meno dei reali.

L'infinito non è dunque uno solo, ma ce ne sono almeno due tipi. Cantor indicò con aleph-zero ($\aleph_0$) il numero di elementi dell'insieme dei numeri naturali e con aleph-uno ($\aleph_1$) il numero di elementi dell'insieme dei numeri reali (l'aleph è la prima lettera dell'alfabeto ebraico): Cantor chiamò questi numeri "transfiniti", cioè che stanno oltre il finito.

Nel 1891 Cantor dimostrò addirittura che di infiniti ce ne sono **infiniti**, nel senso che dato uno se ne trova sempre un altro maggiore.

«**Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi**», ha detto David Hilbert a proposito della teoria dell'infinito che Cantor regalò alla matematica.

3.1.4 Viaggio nell'infinitamente piccolo

Accanto al concetto di infinito, nella storia della matematica si è sviluppato quello di infinitesimo, che ne è il rovescio della medaglia. Se l'infinito rappresenta una grandezza smisuratamente grande, gli infinitesimi sono invece quantità infinitamente piccole: più piccole di qualsiasi numero concepibile, ma senza mai raggiungere zero. Anche la storia degli infinitesimi, come quella dell'infinito, è costellata di paradossi.

Gli infinitesimi apparvero per la prima volta nel Quattrocento, quando Nicola Cusano definì il cerchio come un poligono con infiniti lati di lunghezza infinitesima e dedusse il teorema di Archimede sull'area del cerchio in due parole: si scompone il cerchio in infiniti triangoli di base infinitesima e altezza uguale al raggio. Dato che l'area di

ciascun triangolo è base per altezza diviso 2, l'area del cerchio sarà allora la circonferenza (cioè la somma delle basi dei triangoli) per il raggio diviso 2 (figura 13).

Il problema del ragionamento di Cusano sta nella natura stessa di triangolo infinitesimo: se la sua area è nulla, allora anche il cerchio dovrebbe avere area nulla. Se invece la sua area non è nulla, allora il cerchio dovrebbe avere area infinita. In entrambi i casi si ottiene un valore errato.

Nel 1629 Pierre de Fermat usò gli infinitesimi per definire la derivata, intesa come l'inclinazione della tangente a una curva in un punto. Considerò una secante passante per il punto dato e un secondo punto infinitamente vicino, distante un infinitesimo h . Il rapporto tra la variazione delle ordinate e delle ascisse, il *rapporto incrementale*, dava l'inclinazione cercata. Per esempio, nel caso di una parabola:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h = 2x$$

Qui si considera h diverso da 0 per semplificarlo come divisore, ma uguale a 0 quando lo si elimina alla fine: un procedimento inevitabilmente controverso per la sua mancanza di coerenza.

Nel 1635 Bonaventura Cavalieri usò gli infinitesimi per definire l'integrale per calcolare aree e volumi. Sulla scia di Cusano, Cavalieri considerò le figure geometriche come composte di infiniti *indivisibili*: le curve di punti, come «le perle di una collana», le superfici di segmenti paralleli, come «i fili di una tela», e i solidi di superfici parallele, come «le pagine di un libro». A differenza di perle, fili e pagine, le dimensioni di questi indivisibili erano però ancora una volta infinitesime.

Leibniz e Newton svilupparono le idee di Fermat e Cavalieri, ideando un metodo efficace per risolvere problemi matematici e fisici. Tuttavia, non riuscirono a rispondere adeguatamente alle critiche

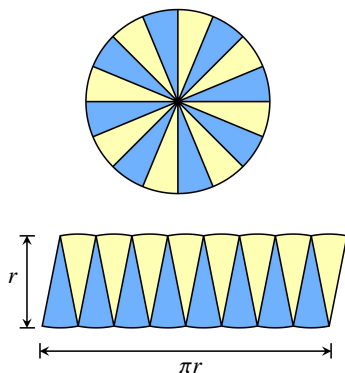


Figura 13: Cusano calcola l'area di un cerchio.

sulla coerenza del calcolo, soprattutto durante un periodo di rapido sviluppo in cui l'attenzione dei matematici era più rivolta alle applicazioni che ai fondamenti.

La critica più dura venne dal vescovo George Berkeley, che parlava degli infinitesimi come di «fantasmi di quantità scomparse», e del metodo di Fermat come di «un doppio errore che genera forse una verità, ma certo non una scienza». L'ultima osservazione rispondeva alla debole difesa dei matematici, che si limitavano a sottolineare l'efficacia e la correttezza pratica del calcolo.

In particolare, Leibniz fondò l'intero calcolo sulla nozione di infinitesimo, una quantità evanescente ma non nulla, cioè più piccola di ogni frazione $1/n$. Il suo approccio è tuttora presente, sia nel nome di *calcolo infinitesimale* sia nelle notazioni da lui introdotte per derivate e integrali:

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \int f(x) dx$$

La derivata viene cioè rappresentata come rapporto di due infinitesimi (d è l'iniziale di "differenza") e l'integrale come somma di indivisibili di larghezza infinitesima (il simbolo $\int$ è la stilizzazione di S , l'iniziale di "somma"). L'uso simmetrico di d e $\int$ richiama poi il teorema fondamentale di Newton e Leibniz, secondo cui derivate e integrali sono operazioni inverse, come differenza e somma.

Mentre l'approccio di Leibniz al calcolo infinitesimale era influenzato dalla sua visione filosofica delle monadi, Newton si concentrava sulle applicazioni fisiche legate alla misura del cambiamento, come la velocità. Diversamente da Cavalieri, Newton vedeva le figure geometriche come generate da moti continui: curve da punti, superfici da segmenti, solidi da superfici. Per lui, la derivata non era un rapporto statico di infinitesimi, ma la «flussione», il cambiamento dinamico di una quantità «fluente». Nei *Principia* affermò che i rapporti finali, in cui certe quantità svaniscono, non sono rapporti di grandezze finite, ma limiti a cui si tende indefinitamente.

L'idea fu ripresa nel 1821 da Augustin Cauchy, che fondò sul concetto di limite l'intero calcolo. Nella sua formulazione, che è quella odierna, l'esempio di Fermat diventa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Così la semplificazione del numero h è legittima, perché h è diverso da 0, mentre la sua eliminazione viene sostituita con un limite in cui h

tenda e 0, senza mai assumere $h = 0$. In altre parole, gli infinitesimi sono variabili e non costanti.

A chi pensava che la soluzione proposta da Cauchy si limitasse a spostare il problema degli infinitesimi verso un'altra forma di ambiguità, quella dei limiti, Karl Weierstrass rispose, a metà dell'Ottocento, con una definizione di limite formulata in modo completamente rigoroso. In questa nuova impostazione, ogni affermazione sull'infinitamente piccolo veniva tradotta in termini precisi, basati su relazioni tra quantità finite. Su queste basi, l'analisi matematica fu finalmente sistemata in modo coerente. Tuttavia, questo approccio non spiegava cosa fossero realmente gli infinitesimi: semplicemente li escludeva, sostituendoli con un formalismo astratto e spesso complesso.

Gli infinitesimi furono pienamente riabilitati solo nel 1965, quando il matematico Abraham Robinson dimostrò l'esistenza dei **numeri iperreali**: un'estensione dei numeri reali che include sia quantità infinitamente piccole, sia quantità infinitamente grandi, proprio come i numeri reali includono sia gli interi sia i numeri decimali.

È allora possibile estendere l'analisi matematica tradizionale a una **analisi non-standard** che usa i numeri iperreali. Su questa base, il calcolo svolto da Fermat diventa del tutto corretto: la quantità h non è zero, quindi si può dividere per h senza problemi. I numeri $2x + h$ e $2x$, pur essendo iperreali distinti, condividono la stessa parte reale, così come due numeri decimali diversi possono avere la stessa parte intera, e quindi sono considerati uguali dal punto di vista dell'analisi classica.

3.1.5 La mappa dell'impero

Nel racconto *Del rigore della scienza* (1935), Borges narra di un impero in cui si decide di realizzare una mappa in scala uno a uno dell'intero territorio.

Borges attribuisce la storia a un libro apocrifo: *Viaggi di uomini prudenti*, dell'inesistente Suárez Miranda (Umberto Eco osservava che Borges «sembra aver letto tutto, e anche di più, visto che ha recensito libri inesistenti»).

In quell'impero, l'arte della cartografia giunse a una tal perfezione che la mappa di una sola provincia occupava tutta una città, e la mappa dell'impero tutta una provincia. Con il passare degli anni, queste mappe smisurate non bastarono più. I colleghi dei cartografi realizzarono una mappa dell'impero che aveva l'immensità dell'impero e coincideva perfettamente

con l'impero stesso. Ma le generazioni seguenti, meno portate allo studio della cartografia, pensarono che questa mappa enorme fosse inutile e non senza empietà la abbandonarono alle inclemenze del sole e degl'inverni.

Il racconto è ispirato al **paradosso di Royce**, formulato dal filosofo Josiah Royce nel 1899. Il paradosso è il seguente: «Immaginiamo che una porzione del suolo d'Inghilterra sia stata livellata perfettamente e che un cartografo vi tracci una mappa d'Inghilterra. L'opera è perfetta». Non c'è particolare del suolo d'Inghilterra, per minimo che sia, che non sia registrato nella mappa; tutto ha lì la sua corrispondenza. La mappa, in tal caso, deve contenere una mappa della mappa, che deve contenere una mappa della mappa della mappa, e così all'infinito».

Umberto Eco esaminò con finta serietà la fattibilità teorica di una simile mappa e, riflettendo sulla sua possibile natura (opaca e stesa sul territorio, sospesa, trasparente, permeabile, orientabile), concluse che una mappa perfettamente fedele non può esistere. Infatti, dato che la mappa ricopre tutto il territorio dell'impero, il territorio è caratterizzato dal fatto di essere un ter-



Figura 14: *Galleria di stampe.*

ritorio integralmente ricoperto da una mappa. Di questa caratteristica la mappa non rende ragione. A meno che sulla mappa non fosse collocata un'altra mappa che rappresenta il territorio più la mappa sottostante. E così via all'infinito. Se il processo si arresta, si dà una mappa finale che rappresenta tutte le mappe frapposte tra sé e il territorio, ma non rappresenta sé stessa. La conclusione del ragionamento è che ogni mappa riproduce il territorio sempre infedelmente.

Il paradosso ricorda *Galleria di stampe*, un'opera di Escher in cui la scena raffigurata contiene il quadro stesso, che a sua volta rappresenta la scena, in un gioco infinito di rimandi (**figura 14**).

3.1.6 Somme da pazzi

Una mattina del 28 gennaio 1913, Godfrey Hardy, un professore di matematica al Trinity College di Cambridge, trovò nella sua cassetta della posta una lettera proveniente dall'India. La lettera, contenuta in una grossa busta coperta di francobolli, era partita da Madras due settimane prima e si apriva con parole destinate a cambiare il corso della matematica:

Gentile Signore, ho ventitré anni e lavoro come contabile nel porto di Madras, con uno stipendio di sole 20 sterline l'anno. Non ho fatto l'università: studio matematica nel tempo libero, seguendo un percorso tutto mio. I matematici di queste parti definiscono «sorprendenti» i risultati che ho ottenuto.

La lettera, firmata da un certo Srinivasa Ramanujan, era accompagnata da undici pagine piene di formule, senza neppure una dimostrazione. Una delle prime era questa:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

In altre parole, Ramanujan sosteneva che se si sommano tutti gli interi, dall'1 fino all'infinito, si ottiene meno un dodicesimo. Cioè, una somma infinita di numeri interi positivi darebbe come risultato un numero frazionario negativo.

Sulle prime Hardy pensò di trovarsi di fronte ai vaneggiamenti di un folle, ma poi ci ripensò e rispose dicendo che «tutto dipende dal rigore dei metodi di dimostrazione usati». Una risposta meno generosa l'aveva data il professor Micaiah Hill di Londra, scrivendo a Ramanujan:

Lei è evidentemente un uomo con gusto per la matematica e qualche abilità, ma ha imboccato una strada sbagliata. E non capisce le precauzioni che bisogna prendere con le serie divergenti, altrimenti non avrebbe ottenuto risultati sbagliati come quelli che mi ha mandato.

La risposta di Hardy fu l'inizio di una delle amicizie più celebri della storia della matematica. Quell'indiano di umili origini era destinato a diventare uno dei matematici più geniali di tutti i tempi.

Per comprendere affermazioni sorprendenti come quella di Ramanujan, è utile richiamare il concetto di serie, cioè la “somma di infiniti termini”. Dato che in pratica è impossibile sommare fra loro infiniti addendi, si considerano le somme parziali, cioè le somme dei primi n termini della sequenza da sommare. Se al crescere di n le somme

parziali si avvicinano sempre più a un valore finito, diremo che la serie è **convergente** e che la sua **somma** è quel valore. Se al crescere di n le somme parziali crescono sempre, superando qualunque numero prefissato, la serie si dice **divergente**, mentre se le somme parziali non tendono ad alcun limite la serie si dice serie **indeterminata**.

Qualche esempio chiarirà le idee. Consideriamo innanzitutto la serie precedente. Se sommiamo i primi tre termini otteniamo 0,875. Se sommiamo i primi quattro termini otteniamo 0,9375, e così via. Se sommiamo i primi cinquanta termini otteniamo circa 0,999 999. Questa serie è un esempio di **serie geometrica**: una serie, cioè, in cui il rapporto di ogni termine della serie rispetto al termine precedente è sempre lo stesso. Dato che al crescere del numero degli addendi le somme parziali si avvicinano sempre più a 1, la serie è convergente e la sua somma è 1.

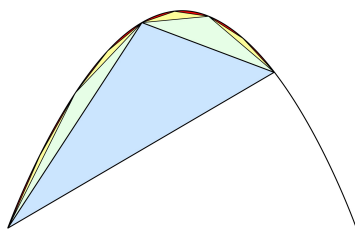


Figura 15: Archimede seziona il segmento parabolico in un numero arbitrario di triangoli.

Nel secolo –III Archimede usò una serie geometrica per calcolare l'area di un **segmento parabolico**, cioè la regione racchiusa da una parabola e da una retta. Archimede dimostrò che l'area del segmento parabolico è $4/3$ di quella del triangolo inscritto la cui base è la corda della parabola e il cui terzo vertice è il punto della parabola che è attraversato da una tangente che è parallela alla corda stessa.

Archimede ebbe l'idea di scomporre il segmento parabolico in infiniti triangoli, come nella **figura 15**. Ciascuno di questi triangoli è inscritto nel proprio segmento parabolico allo stesso modo in cui il triangolo blu è inscritto nel segmento grande.

Si dimostra che l'area di ciascun triangolo verde è un ottavo dell'area del grande triangolo blu, che per semplicità supponiamo essere uguale a 1. Per estensione, ciascuno dei triangoli gialli ha un ottavo dell'area di un triangolo verde, ciascuno dei triangoli rossi ha un ottavo dell'area di un triangolo giallo e così via. Quindi l'area del segmento parabolico è data da:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{8^3} + 2^4 \cdot \frac{1}{8^4} + \dots$$

dove il primo termine è l'area del triangolo blu, il secondo termine è l'area dei due triangoli verdi, il terzo termine è l'area dei quattro triangoli gialli e così via. Svolgendo i prodotti, la somma precedente si può scrivere:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Archimede dimostrò che la somma precedente è uguale a $4/3$. Per farlo, usò un metodo interamente geometrico, mostrato nella **figura 16**. Ogni quadrato viola successivo ha un quarto dell'area del quadrato precedente. L'area viola misura:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

I quadrati viola sono congruenti a entrambi i gruppi di quadrati gialli, e quindi coprono $1/3$ dell'area del quadrato unitario. Quindi l'area viola misura:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$$

La somma della serie che rappresenta l'area del segmento parabolico vale quindi $4/3$, perché il triangolo blu contribuisce con 1 e i quadrati viola aggiungono $1/3$, quindi $1 + 1/3 = 4/3$.

Il calcolo delle serie attraverso tutta la storia della matematica. A proposito, la parola *calcolo* deriva dal latino *calculus*, che significa "sassolino". I Greci e i Romani eseguivano operazioni con i numeri disponendo ordinatamente alcuni sassolini su un piano. Per esempio, i numeri quadrati (4, 9, 16, 25, 36 e così via) erano quelli ottenuti disponendo i sassolini in modo tale da formare un quadrato.

Analogamente, i numeri triangolari si ottengono disponendo dei sassolini a forma di triangolo: prima mettiamo un sassolino come vertice, poi due sassolini, poi tre, poi quattro, poi cinque e così via.

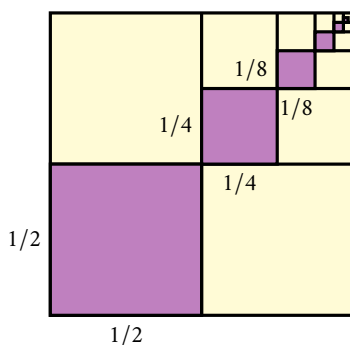


Figura 16: Dimostrazione geometrica del fatto che $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$.

Il primo numero triangolare è 1 (che corrisponde a un triangolo formato da un solo punto), il secondo è 3, il terzo è 6, il quarto è 10 e così via (figura 17).

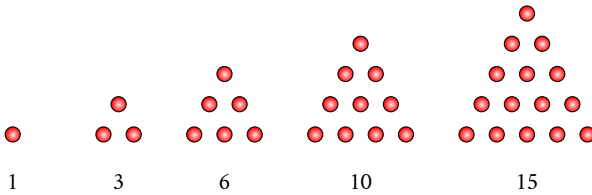


Figura 17: Numeri triangolari.

Poniamoci ora il seguente problema: qual è la somma dei reciproci dei numeri triangolari? Vogliamo cioè calcolare la somma

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots$$

Il problema fu risolto nel 1796 da Gottfried Leibniz. Consideriamo la somma

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots$$

e dividiamo tutti i termini dell'uguaglianza per 2:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

L'uguaglianza ottenuta può essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

Sostituiamo il primo termine della somma con l'equivalente $1 - 1/2$, il secondo termine con $1/2 - 1/3$, il terzo con $1/3 - 1/4$, e così via:

$$\frac{S}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

Tranne il primo, tutti i termini della somma appaiono due volte, una volta con segno più e l'altra con segno meno, e quindi si cancellano. Dopo le cancellazioni abbiamo che $S/2 = 1$, quindi $S = 2$. In conclusione:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots = 2$$

In tutte le serie precedenti, gli addendi sono sempre più piccoli e si avvicinano a sempre di più a zero: questa condizione è necessaria perché la serie sia convergente, ma non è sufficiente. Consideriamo per esempio la seguente serie, detta **serie armonica**:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Usando il simbolo per l'infinito introdotto nel 1655 da John Wallis, possiamo scrivere:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

Storicamente, la serie armonica è stata il primo esempio non banale di serie divergente. Il primo a calcolarne la somma fu Nicola d'Oresme, che ebbe l'intuizione di suddividere i termini frazionari in blocchi di lunghezza doppia uno dell'altro:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots$$

La somma dei termini in ogni blocco è maggiore di $1/2$: per esempio, nel primo blocco $1/3$ è maggiore di $1/4$, e quindi la loro somma è maggiore di $2/4$, che è uguale a $1/2$. Ma allora la somma della serie armonica è maggiore di una somma di infiniti termini uguali a $1/2$, che è infinita.

Il risultato precedente fu riscoperto da Johann Bernoulli, la cui dimostrazione venne inserita nel 1689 da suo fratello Jakob in un trattato sulle serie, corredata da una poesia che cantava lo **stupore** provocato dal fatto che infiniti termini possano produrre una somma finita (nelle serie convergenti) e che termini infinitesimi possano produrre una somma infinita (nella serie armonica).

Un esempio geometrico della paradossalità delle serie è la tromba di Torricelli, un solido ottenuto ruotando un ramo di iperbole attorno al suo asse, introdotto nel 1644 da Evengelista Torricelli (**figura 18**).

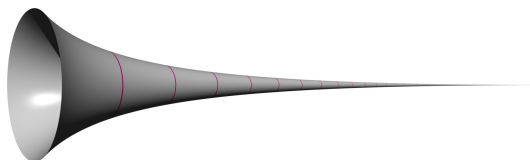


Figura 18: La tromba di Torricelli ha volume finito, ma area infinita.

Torricelli lo chiamò **solido acuto iperbolico**, mentre oggi si usano nomi più fantasiosi, da **anfora di Zeus** a **tromba di Gabriele**. Ne calcolò il volume, ottenendo un risultato controintuitivo: il solido ha **volume finito**, ma **superficie esterna infinita**. Se lo pensiamo come un recipiente, questo significa che si può riempirne l'interno di vernice, ma non pitturare l'esterno.

Il parallelo con le serie è diretto: la superficie infinita è una conseguenza della divergenza della serie armonica, mentre il volume finito corrisponde alla convergenza della serie dei reciproci dei quadrati. E la paradossalità del risultato derivava dall'idea ingenua che una somma infinita dovesse necessariamente essere infinita.

Un esempio di serie indeterminata è la **serie unitaria a segni alterni**, proposta nel 1703 da Guido Grandi.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Uno dei paradossi più sconcertanti della serie di Grandi è che si ottengono risultati contrastanti a seconda di come si raggruppano i termini:

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$$

Grandi, che era un monaco, offrì questo paradosso come una metafora matematica del modo in cui Dio poteva aver creato il mondo, partendo dal nulla e arrivando a qualcosa, ma suggerì che in realtà il vero valore della serie fosse $1/2$. Per mostrare che l'idea poteva aver senso, anche se le somme parziali oscillano tra 0 e 1, Grandi fece l'esempio di un gioiello ricevuto in eredità da due fratelli, con l'obbligo di non venderlo: se essi e i loro eredi se lo scambiano regolarmente, alla fine dei tempi le loro famiglie l'avranno tenuto in media per metà tempo ciascuna.

L'argomento va valutato in prospettiva: i paradossi permisero di arrivare in seguito alla definizione precisa di somma di una serie, come limite delle somme parziali, e di capire che l'ambiguità precedente deriva dal voler assegnare una somma definita a una serie non convergente, le cui somme parziali oscillano fra 0 e 1.

L'idea della media fu formalizzata da Ernesto Cesàro, che nel 1890 propose di calcolare la somma facendo non il limite delle somme parziali, ma il limite delle loro medie. Se una serie converge con il vecchio metodo, la somma non cambia con il nuovo, ma alcune delle

La serie armonica si chiama così per ragioni musicali. Il suono prodotto da un corpo vibrante (per esempio la corda di una chitarra) non è mai puro, ma è formato da più suoni, diversi tra loro in frequenza: al suono fondamentale, quindi, si aggiungono i cosiddetti armonici. I rapporti tra le frequenze degli armonici e la frequenza del suono fondamentale sono pari agli addendi della serie: valgono cioè un mezzo, un terzo, un quarto, e così via.

serie che non convergono con il vecchio metodo convergono con il nuovo. Nel caso della serie di Grandi si ottiene effettivamente

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

Infatti le somme parziali della serie sono 1, 0, 1, 0, 1, 0, eccetera, e oscillano tra 0 e 1. Le medie delle somme parziali sono 1, $1/2$, $2/3$, $1/2$, $3/5$, $1/2$, eccetera, e convergono a $1/2$.

Il massimo esperto di manipolazioni delle serie fu Eulero. Nel 1749 considerò la serie dei numeri interi a segni alterni e arrivò a questa sorprendente conclusione:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$$

Purtroppo, la verifica del risultato con il metodo di Cesàro non funziona, perché di questa serie non solo non convergono le somme parziali, ma neppure le loro medie: le somme parziali della serie di Eulero sono infatti 1, -1, 2, -2, 3, -3, eccetera, e non convergono. Convergono però le medie delle medie. Le medie delle somme parziali sono infatti 1, 0, $2/3$, 0, $3/5$, 0, $4/7$, eccetera, e oscillano tra 0 e valori che tendono a $1/2$. Le medie delle medie convergono dunque a $1/4$, il valore intuito da Eulero.

Se non basta, si può ripetere il procedimento a volontà, per esempio considerando le medie delle medie delle somme parziali, e così via.

Si intuisce, dunque, che per sommare serie apparentemente non convergenti esistono metodi via via più generali e potenti. Godfrey Hardy li ha esposti sistematicamente in un trattato del 1948, che si apre con questa citazione di Niels Abel (1826):

Le serie divergenti sono in genere un'invenzione del **diavolo**, e usarle in una dimostrazione è davvero vergognoso. Impiegandole si può dimostrare tutto quel che si vuole, e hanno causato tanti danni e generato tanti paradossi.

Il disfattismo è solo apparente, però, perché Abel notava che, stranamente, usando serie indeterminate spesso si ottengono risultati corretti, e annunciava di voler cercare la ragione di questo «interessante problema». Il risultato fu il metodo per calcolare le serie indeterminate che oggi porta il suo nome, ed estende tutti quelli che abbiamo citato, confermandone i risultati.

Nemmeno il metodo di Abel, però, permette di ottenere il valore di una serie calcolata da Srinivasa Ramanujan, con cui abbiamo aperto

questo paragrafo. Oggi sappiamo interpretare in modo rigoroso la formula di Ramanujan grazie alla zeta di Riemann, una funzione che nasce come somma infinita che dipende da un parametro complesso:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Questa serie converge solo per valori di s con parte reale maggiore di 1. Fuori da questa regione la somma non ha senso e la funzione non è definita. Grazie al prolungamento analitico, però, è possibile estendere la funzione in modo unico a tutto il piano complesso (eccetto $s = 1$). In questo modo la funzione è ben definita anche nei punti in cui la serie originaria non converge. La somma di Ramanujan può essere allora interpretata come la zeta di Riemann calcolata in -1 :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Un risultato a prima vista impossibile ha trovato posto nella matematica più rigorosa e perfino nelle teorie fisiche più avanzate, a dimostrazione di quanto sottile possa essere il confine tra l'assurdo e il vero.

3.2 PROBABILITÀ E STATISTICA

Il caso governa gran parte della nostra vita, ma la matematica sa dargli forma. Attraverso esperimenti, paradossi e simulazioni, scopriremo come la probabilità e la statistica ci aiutano a distinguere la fortuna dall'inganno dei numeri.

3.2.1 Buon compleanno!

Dalla sua proclamazione a oggi, la Repubblica italiana ha avuto 30 presidenti del Consiglio dei ministri. Se guardiamo le statistiche, scopriamo che due di loro, Antonio Segni e Ciriaco De Mita, sono nati lo stesso giorno, il 2 febbraio. Gli Stati Uniti d'America invece hanno avuto 46 Presidenti: James Polk e Warren Harding sono nati il 2 novembre, mentre Jimmy Carter e Dwight Eisenhower sono nati il 14 ottobre: inoltre Harry Truman e Gerald Ford sono morti il 26 dicembre, James Polk e James Buchanan sono morti il 15 giugno e ben tre presidenti, John Adams, Thomas Jefferson e James Monroe sono morti il 4 luglio.

Coincidenze come quelle precedenti sono una conseguenza del paradosso del compleanno, scoperto nel 1939 da Richard von Mises. Il

paradosso afferma che la probabilità che in un gruppo ci siano due persone che compiano gli anni lo stesso giorno è molto superiore a quanto potrebbe suggerire l'intuito.

Consideriamo per esempio un gruppo di 23 persone e chiediamoci qual è la probabilità che due di esse compiano gli anni lo stesso giorno. Dato che 23 è un numero molto più piccolo di 365 (i giorni di un anno), potremmo aspettarci che la probabilità sia molto piccola. E invece si dimostra che la probabilità è circa il 50%.

Supponiamo per semplicità che ogni anno abbia 365 giorni e che tutti i giorni siano ugualmente probabili per nascere. Immaginiamo un gruppo di 23 persone: vogliamo sapere qual è la probabilità che almeno due di loro condividano il compleanno. Per semplificare il calcolo, iniziamo considerando l'opposto: la probabilità che nessuno abbia lo stesso compleanno. Per la seconda persona, ci sono 364 possibilità su 365 di avere il compleanno in un giorno diverso dalla prima. La terza persona ha 363 possibilità su 365 di scegliere un giorno diverso dalle prime due, e così via, aggiungendo una persona alla volta. E così via. In formule, la probabilità P_1 che tutti i 23 compleanni cadano in date diverse è:

$$P_1 = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - 23 + 1}{365} \approx 50\%$$

Quindi la probabilità che ci siano due compleanni che cadono lo stesso giorno è $1 - P_1 = 50\%$.

Analogamente, con 30 persone la probabilità è il 70%, mentre con 50 persone è il 97%, anche se per avere la certezza bisogna avere un gruppo di almeno 366 persone (367 se si considera l'anno bisestile). La **figura 19** mostra l'andamento della probabilità $P(n)$ che in un gruppo di m persone ci siano almeno due compleanni che cadono lo stesso giorno.

Il paradosso del compleanno è noto agli informatici che lavorano in **crittografia**, la disciplina che protegge la trasmissione dei dati sul web. Una sua applicazione fondamentale è la firma digitale, che permette di verificare l'autenticità di un documento. Dal documento si ricava un'*impronta digitale*, una breve sequenza di caratteri che lo identifica: anche una minima modifica produce di solito un'impronta diversa. La firma digitale si ottiene applicando un algoritmo speciale all'impronta, anziché all'intero documento, rendendo il procedimento molto più veloce. Rimane però un rischio: un hacker potrebbe tentare di creare una "collisione", cioè due documenti diversi con la stessa impronta digitale.

Supponiamo per esempio che Tizio voglia imbrogliare Caio inducendolo a firmare un contratto fraudolento. Tizio prepara un contratto corretto e uno fraudolento. Tizio trova poi un certo numero di punti dove il contratto corretto può essere modificato senza cambiarne il significato, per esempio inserendo degli spazi, dei segni di punteggiatura o dei si-

nonimi. Combinando queste modifiche, Tizio può scrivere un gran numero di varianti del contratto che sono in pratica tutti contratti corretti. Allo stesso modo, scrive anche un gran numero di varianti del contratto fraudolento. Alla fine, Tizio genera l'impronta digitale di tutte queste varianti finché non trova una variante del contratto corretto e una variante di quello fraudolento che hanno la stessa impronta. A questo punto, Tizio presenta a Caio il documento e Caio lo firma. Tizio allora prende la firma e l'attacca al contratto fraudolento. Ora la firma "prova" che Caio ha firmato il contratto fraudolento.

Per evitare attacchi come quello descritto bisogna far sì che l'impronta digitale sia abbastanza lunga da impedire un attacco per tentativi da parte di un hacker.

Un errore concettuale analogo può portare a problemi più seri. Supponiamo si stia valutando la probabilità che due persone siano colpevoli. Pensiamo a una coppia fermata dalla polizia sulla base della descrizione di un testimone oculare e della vicinanza al luogo del delitto. Che probabilità ci sono che quella specifica coppia corrisponda per caso alla descrizione del testimone? Pochissime, dirà il poliziotto, che è un essere umano e non calcolatore perfettamente logico. Ma la situazione può assomigliare alla storia dei compleanni: anziché considerare proprio "quella" coppia fermata e proprio "quella" parte di descrizione che meglio si adatta a essa, si dovrebbero considerare tutte le coppie possibili che si trovavano nelle vicinanze e tutte le possibili somiglianze che si potevano trovare a partire dalla

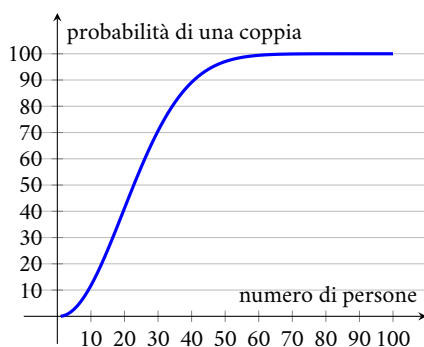


Figura 19: Il grafico mostra l'andamento della probabilità $P(n)$ che in un gruppo di n persone ce ne siano due che compiano gli anni lo stesso giorno.

descrizione del testimone. Qual era la probabilità che nessuna di esse andasse bene per puro caso? Variando l'insieme dei casi possibili e il numero di sospettati, potremmo trovare risultati completamente diversi. E la coppia arrestata potrebbe addirittura passare da "sicuramente colpevole" a "probabilmente innocente". Il tutto in modo decisamente controintuitivo. E anche un po' inquietante.

3.2.2 Il gioco delle tre porte

Nel gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse: dietro una c'è un'automobile, mentre le altre due nascondono ciascuna una capra. Il giocatore sceglie una porta e può vincere il premio corrispondente. A questo punto il conduttore dello *show*, che conosce cosa si trova dietro ogni porta, apre una delle due porte rimanenti, mostrando una capra. Il giocatore ha allora la possibilità di cambiare la propria scelta, passando all'unica porta rimasta chiusa. La probabilità di vincere aumenta se il giocatore decide di cambiare porta?

La risposta è sì: la probabilità di trovare l'auto raddoppia, passando da un terzo a due terzi. Ci sono infatti tre possibilità, ciascuna avente probabilità $1/3$:

- Il giocatore sceglie la capra numero 1 e il conduttore sceglie l'altra capra, la numero 2. Cambiando, il giocatore vince l'auto.
- Il giocatore sceglie la capra numero 2 e il conduttore sceglie l'altra capra, la numero 1. Cambiando, il giocatore vince l'auto.
- Il giocatore sceglie l'auto e il conduttore sceglie una capra. Cambiando, il giocatore trova l'altra capra.

Nei primi due casi, cambiando la propria scelta il giocatore vince l'auto. Nel terzo caso, il giocatore che cambia perde ([figura 20](#)). Dato che cambiando si vince in due casi su tre, la probabilità di vittoria cambiando la scelta iniziale è uguale a $2/3$.

Una soluzione alternativa è considerare che se si cambia la propria scelta, il solo caso in cui si perde è quello in cui originariamente si è scelta l'auto e quindi la domanda del conduttore può essere considerata un invito a invertire le probabilità di successo con quelle di insuccesso.

Il problema è stato risolto nel 1990 da Marilyn vos Savant, una matematica dilettante riconosciuta dal Guinness dei primati come l'essere umano dal quoziente d'intelligenza più alto del mondo. La soluzione

«Il giocatore cade spesso nella fallacia della compensazione: crede che, se un evento non si è verificato da tempo, sia ora più probabile. È un'illusione.»
— Amos Tversky

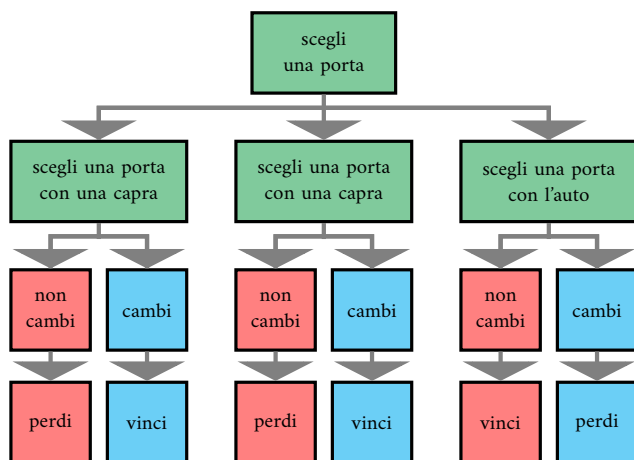


Figura 20: Quale porta conviene scegliere?

fece scalpore, perché molti scienziati inizialmente non riconobbero la correttezza della soluzione proposta dalla vos Savant.

L'obiezione più comune è che quando si valutano le probabilità bisogna ignorare il passato. Quindi la scelta della prima porta e la scelta del conduttore si dovrebbero trascurare, e dato che si sceglie tra due porte la probabilità di individuare quella giusta dovrebbe essere il 50%, indipendentemente dal fatto che si decida di cambiare o mantenere la porta scelta. Ignorare il passato, però, è corretto in alcuni giochi (come nel lancio di una moneta), ma non in tutti (come in certi giochi di carte, in cui è utile contare le carte uscite). Nel problema di Monty Hall l'esclusione da parte del conduttore di una scelta certamente perdente rende la porta rimanente più interessante della prima porta scelta quando non si aveva alcuna informazione.

Un paradosso simile a quello di Monty Hall è il paradosso delle tre carte. Ci sono tre carte, di cui la prima (*A*) è rossa su entrambe le facce, la seconda (*B*) su una faccia è rossa e sull'altra è bianca e la terza (*C*) è bianca su entrambe le facce. Scegliamo a caso una carta e la posiamo su un tavolo: la faccia visibile è rossa. Qual è la probabilità che anche la faccia non visibile sia rossa?

Potremmo rispondere che probabilità è pari al 50%, perché solo due carte (la *A* e la *B*) possono mostrare il rosso e solo una di queste (la *A*) può mostrare anche sull'altro lato il rosso. Tuttavia, la risposta giusta è $2/3$.

«L'abilità
consiste nel
camminare su
una corda tesa
sopra le cascate
del Niagara.
L'intelligenza sta
nel non
provarci.»
— Marilyn vos
Savant

Tabella 1: Il paradosso delle tre carte.

Carta	Faccia visibile	Faccia coperta
A	1 (rossa)	2 (rossa)
A	2 (rossa)	1 (rossa)
B	3 (rossa)	4 (bianca)
B	4 (bianca)	3 (rossa)
C	5 (bianca)	6 (bianca)
C	6 (bianca)	5 (bianca)

Siano infatti *A*, *B* e *C* le tre carte, 1 e 2 le facce di *A*, 3 e 4 le facce di *B*, 5 e 6 le facce di *C*. Se estraiamo una carta e la posiamo sul tavolo, si possono verificare i sei casi equiprobabili riportati nella **tabella 1**. Escludendo gli ultimi tre casi perché la faccia visibile è bianca, restano tre casi dove la faccia visibile è rossa, due dei quali nascondono una faccia anch'essa rossa, quindi la probabilità è di $2/3$.

Il paradosso, proposto da Warren Weaver nel 1950, pur nella sua semplicità ha una soluzione controintuitiva: l'intuito suggerisce la risposta sbagliata, perché non distingue le facce 1 e 2 della stessa carta.

La teoria della probabilità è un campo della matematica molto ricco di paradossi, verità che vanno così tanto contro il buon senso che è difficile esserne convinti anche dopo averli correttamente dimostrati.

3.2.3 La scimmia instancabile

Un romanzo del 1981 racconta la storia di un virus letale che colpisce l'uomo e che è stato creato in un laboratorio. Il romanzo narra le peripezie di una madre alla ricerca del figlio, inizialmente creduto morto. La ricerca conduce la donna in una struttura militare dove suo figlio è prigioniero dopo essere stato accidentalmente infettato da un virus creato in Cina, nella città di Wuhan.

Con quasi quarant'anni di anticipo, il romanzo sembra riferirsi alla pandemia da Covid-19, scoppiata proprio a Wuhan nel dicembre del 2019, con tanto di tesi complottista sulle origini del virus. L'autore dell'incredibile profezia è lo scrittore Dean Koontz nel libro *The Eyes of Darkness*. Nel testo si legge: «Uno scienziato cinese di nome Li Chen fuggì negli Stati Uniti, portando una copia su dischetto dell'arma biologica cinese più importante e pericolosa del decennio.

La chiamano “Wuhan-400” perché è stata sviluppata nei loro laboratori di RDNA vicino alla città di Wuhan ed era il quattrocentesimo ceppo vitale di microorganismi creato presso quel centro di ricerca. «Wuhan-400 è un’arma perfetta», scrive Koontz, perché «colpisce solo gli esseri umani». In un altro passaggio del romanzo Koontz scrive che «intorno al 2020 una grave polmonite si diffonderà in tutto il mondo» e che questa è «in grado di resistere a tutte le cure conosciute».

Per quanto suggestivo, il fatto che Koontz abbia predetto la pandemia da Covid-19 è solo una coincidenza. È infatti pressoché inevitabile che fra i milioni di storie che vengono scritte prima o poi qualcuna si avveri, almeno in parte. Anche perché il resto del romanzo non c’entra nulla con la realtà. Di più: nella versione originale, uscita nel 1981, non si parla di Wuhan, ma della città sovietica di Gorki, e il virus si chiama “Gorki-400”. Divenne Wuhan nell’edizione del 1996, perché l’Unione Sovietica non esisteva più e la Cina sembrava una fonte più credibile.

Quello di Koontz non è il primo caso di apparente precognizione letteraria: il romanzo del 1898 *The Wreck of the Titan* di Morgan Robertson “previde” il disastro del Titanic del 1912 descrivendo un transatlantico, il Titan, che affondava nel Nord Atlantico dopo uno scontro con un iceberg. In questo caso, però, il romanzo fu ritoccato dopo il 1912 per renderlo più calzante. Nella versione originale, infatti, la nave era piccola e il titolo era un generico *Futility*.

Tutto ciò è una conseguenza del **teorema della scimmia instancabile**, un paradosso della teoria delle probabilità scoperto da Émile Borel nel 1913. Il teorema afferma che una scimmia che preme a caso i tasti di una tastiera per un tempo sufficientemente lungo riuscirà a scrivere qualunque testo. Come esempio i francesi prendono i volumi della Biblioteca Nazionale di Francia, gli inglesi le opere di William Shakespeare e gli italiani la Divina Commedia.

Qual è la probabilità che una scimmia scriva al primo tentativo la Divina Commedia battendo a caso su una tastiera? Se la tastiera ha 50 tasti, la scimmia ha una probabilità su 50 di scrivere correttamente la prima lettera, una su 50^2 di scrivere le prime due, mentre la probabilità di comporre tutte le 400 000 lettere della Commedia è pari a una su $50^{400\,000}$, cioè circa una su 10^{10^6} , un numero straordinariamente piccolo, ma non nullo. Quindi la probabilità di *non* scrivere la Commedia al primo tentativo è circa $1 - 1/10^{10^6}$ (un numero che sfiora

il 100%), quella di non scriverla al secondo è circa $(1 - 1/10^{10^6})^2$, mentre la probabilità di non scriverla mai dopo n tentativi è:

$$\left(1 - \frac{1}{10^{10^6}}\right)^n$$

Se n tende all'infinito, questa probabilità tende a 0. Quindi la probabilità che la scimmia scriva la Commedia con infiniti tentativi a disposizione è pari a 1, cioè al 100%.

Nella *Guida galattica per gli autostoppisti*, Douglas Adams cita «un'incredibile moltitudine di scimmie che vogliono parlare di una sceneggiatura dell'Amleto che hanno appena finito di scrivere».

Un sito Internet ha simulato un incessante battere casuale di tasti e poi lo ha confrontato con le opere di Shakespeare per identificare sequenze di caratteri comuni tra i due testi. Dopo miliardi di miliardi di miliardi di anni-scimmia di battitura casuale (un tempo molto superiore all'età dell'universo), si è arrivati a una sequenza di 19 caratteri dei *Due gentiluomini di Verona*, di 18 caratteri del *Timone di Atene* e di 24 caratteri dell'*Enrico IV*. Come si voleva dimostrare, è solo questione di tempo.

3.2.4 Quando i numeri ingannano

Nel 1973 all'università di Berkeley in California furono ammessi il 44% di candidati uomini contro il 35% di candidate donne. I dirigenti dell'università, temendo di essere denunciati per discriminazione, incaricarono Peter Bickel di analizzare i dati per capire se davvero le candidate donne fossero state sfavorite. Quando Bickel analizzò i dati dei singoli dipartimenti separatamente ebbe una sorpresa ([tabella 2](#)).

I dati mostravano una prospettiva ribaltata: per ciascun dipartimento, le percentuali di donne ammesse erano più alte di quelle dei maschi. **Non c'era quindi stata alcuna discriminazione.** Eppure nel complesso la percentuale di donne ammesse era minore di quella degli uomini. Sembrava che le donne fossero andate meglio degli uomini in ciascun dipartimento, ma che nel complesso fossero andate peggio. Il paradosso è dovuto al fatto che le donne si erano candidate in maggioranza a corsi scientifici, più selettivi, mentre gli uomini avevano preferito corsi umanistici in cui era più facile essere ammessi.

Abbiamo appena visto un esempio del **paradosso di Simpson**, formulato da Edward Simpson nel 1951: il paradosso si manifesta quando

Tabella 2: Risultati all'esame di ammissione all'università di Berkeley nel 1973, divisi per dipartimento.

Dipartimento	Uomini			Donne		
	Candidati	Ammessi	%	Candidate	Ammesse	%
Letteratura	820	510	62%	110	90	82%
Storia	560	320	57%	30	20	67%
Economia	330	120	36%	600	250	41%
Informatica	420	130	31%	370	130	35%
Fisica	190	40	21%	400	120	30%
Matematica	270	20	7%	340	40	11%
Totale	2590	1140	44%	1850	650	35%

due insiemi di dati considerati separatamente confermano un'ipotesi, mentre considerati insieme sembrano smentirla.

Supponiamo di dover verificare l'efficacia di un farmaco contro una malattia mortale che colpisce sia i cani che i gatti. Prendiamo due gruppi di animali (cani e gatti): al primo, detto gruppo sperimentale, diamo il farmaco, mentre al secondo, detto gruppo di controllo, non diamo nulla.

Ipotizziamo che il gruppo sperimentale sia formato da un gatto e quattro cani: il gatto e un cane guariscono, gli altri tre cani muoiono. Il gruppo di controllo, invece, è formato da quattro gatti e un cane: il cane e un gatto muoiono, gli altri tre gatti guariscono (figura 21a). Nel mondo reale questi numeri sarebbero più grandi, ma noi li supponiamo piccoli per seguire meglio il ragionamento.

Nel nostro esempio, il 100% dei gatti trattati con il farmaco è guarito, mentre solo il 75% dei gatti non trattati è guarito. Il 25% dei cani trattati è guarito, mentre lo 0% dei cani non trattati è guarito. Quindi sembra che il farmaco sia efficace sia per i gatti che per i cani (figura 21b).

Eppure, se consideriamo i gatti e i cani nel loro complesso, sembra che il farmaco sia non solo inefficace, ma addirittura dannoso, perché il 60% degli animali non trattati è guarito, mentre solo il 40% degli animali trattati è guarito (figura 21c). Sembra che

		
	✓ 	✓  ✗  ✗  ✗ 
✗ 	✓  ✗  ✗  ✓ 	✗  ✗ 

(a) Secondo i dati sperimentali....

		
	✓ = 100%	✓ = 25% ✗ ✗ ✗ ✗
✗ 	✓ = 75% ✗ ✗ ✗ ✓	✗ = 0% ✗ ✗ ✗ ✗

(b) ...sembra che il farmaco funzioni.

	+	
✓✓	✗✗✗	= 40%
✓✓✓	✗✗	= 60%

(c) O no?

Figura 21: Il farmaco funziona o no?

George Pólya ricordava ai suoi studenti che imparare a risolvere un problema matematico non serve solo in classe: «Saper risolvere problemi è utile nella vita quotidiana e nell'educazione del cittadino.»

il farmaco sia efficace per i gatti e per i cani considerati separatamente, ma riduca le loro probabilità di guarire se li consideriamo insieme.

Il paradosso si verifica perché il gruppo sperimentale e il gruppo di controllo non sono omogenei. La malattia, infatti, colpisce più duramente i cani che i gatti: un gatto non trattato ha più probabilità di guarire di un cane trattato. I gatti trattati sono meno dei cani trattati, il che porta a sottostimare la percentuale complessiva degli animali trattati guariti, e i gatti non trattati sono più dei cani non trattati, il che porta a sovrastimare la percentuale complessiva degli animali non trattati guariti.

Se avessimo scelto un campione omogeneo, per esempio formato da quattro gatti e quattro cani trattati, e da quattro gatti e quattro cani non trattati, mettendo insieme i dati avremmo trovato cinque morti e tre guariti tra i non trattati, con una probabilità di guarigione del 37,5%, e cinque guariti e tre morti tra i trattati, con una probabilità di guarigione del 62,5%, senza alcun paradosso.

Tabella 3: Verifica dell'efficacia di un farmaco.

(a) Pazienti giovani.

Giovani	Guariti	Non guariti	Totale	% guariti
trattati	90	10	100	90%
non trattati	720	180	900	80%

(b) Pazienti anziani.

Anziani	Guariti	Non guariti	Totale	% guariti
trattati	160	640	800	20%
non trattati	20	180	200	10%

(c) Valori combinati.

Combinati	Guariti	Non guariti	Totale	% guariti
trattati	250	650	900	28%
non trattati	740	360	1100	67%

Il paradosso di Simpson è importante in medicina quando si verifica l'efficacia di un nuovo farmaco. La **tabella 3** mostra un esempio. Il farmaco sembra essere efficace sia per i pazienti giovani (90% di guarigione nei pazienti trattati rispetto all'80% nei non trattati) che per

Tabella 4: Fumare fa bene?

(a) Giovani.

Giovani	Vivi	Morti	Totale	% vivi
fumatori	400	100	500	80%
non fumatori	500	100	600	83%

(b) Anziani.

Anziani	Vivi	Morti	Totale	% vivi
fumatori	5	45	50	10%
non fumatori	40	160	200	20%

(c) Valori combinati.

Combinati	Vivi	Morti	Totale	% vivi
fumatori	405	145	550	74%
non fumatori	540	260	800	68%

quelli anziani (20% di guarigione nei pazienti trattati rispetto al 10% nei non trattati), ma mettendo insieme i dati di tutti i pazienti sembra che il farmaco sia non solo inefficace, ma addirittura dannoso, perché la percentuale di guarigione è minore nei pazienti trattati (28%) che nei pazienti non trattati (67%). Sembra che il farmaco faccia bene sia ai giovani che agli anziani, ma faccia male a tutti.

Quando si verifica l'efficacia di un farmaco, bisogna che nel gruppo di pazienti trattati e in quello dei pazienti non trattati le variabili che possono influenzare la guarigione (come l'età) siano distribuite in modo simile. In particolare, bisogna che il numero dei giovani e degli anziani trattati sia lo stesso.

Nel 1972 a Whickham, In Inghilterra, è stato condotto un sondaggio sulle abitudini della popolazione locale in merito al fumo. Raccolti i dati, nel 1996 gli studiosi sono tornati a verificare il tasso di mortalità tra le persone che avevano partecipato al sondaggio. I dati riportati nella **tabella 4** sono un esempio folgorante del paradosso di Simpson in azione: sembra che fumare faccia bene. Almeno finché non si considera l'impatto dell'età sulla mortalità.

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DEI NUMERI IRRAZIONALI



esistono numeri
come la radice quadrata di 2
che non sono rapporti
di numeri interi



gli irrazionali
sono numeri veri e propri,
parte integrante
del sistema numerico

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA



Achille
sembra non riuscire mai
a raggiungere la tartaruga



la somma
di infiniti tratti percorsi
può dare un totale finito

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DELLA FRECCIA



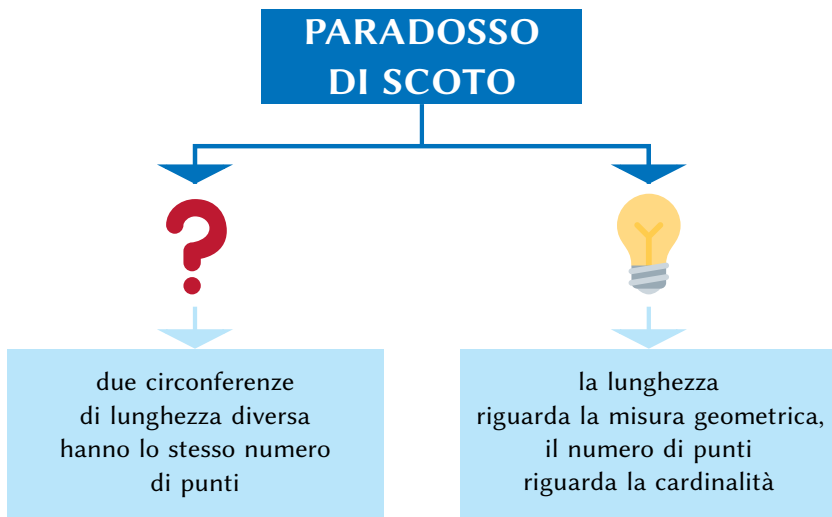
una freccia in volo
è ferma in ogni istante
e quindi non si muove



in ogni istante di tempo
infinitamente piccolo
la freccia percorre
uno spazio infinitesimo

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA



MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DI GALILEO



ci sono tanti numeri naturali
quanti quadrati perfetti



nell'infinito, un insieme
può essere messo
in corrispondenza biunivoca
con una sua parte

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DI CANTOR



i numeri reali
sono più dei numeri interi



l'infinito non è unico,
ma ci sono infiniti
di diversa grandezza

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA



MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DELLA MAPPA DI ROYCE



una mappa
perfettamente fedele
del territorio
non può esistere



pretendere
una corrispondenza perfetta
porta a un regresso infinito

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DELLE SERIE CONVERGENTI



la somma
di infiniti termini
può dare un numero finito



le somme infinite
hanno proprietà paradossali

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DELLE SERIE DIVERGENTI



la somma di termini
che tendono a zero
può dare un numero infinito



il fatto che i termini
tendano a zero
è necessario ma non sufficiente
per la convergenza

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DEL COMPLEANNO



in un piccolo gruppo,
la probabilità
di compleanni coincidenti
è sorprendentemente alta



la probabilità
cresce rapidamente
con il numero di persone

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DI MONTY HALL



cambiare scelta dopo l'apertura
di una porta non vincente
aumenta
le probabilità di vittoria



l'informazione
rivelata da Hall
cambia le probabilità iniziali

MAPPA DI SINTESI

MATEMATICA

PARADOSSO DI SIMPSON



un risultato che vale
in singole categorie
può cambiare
mettendo insieme i dati



la statistica a volte inganna:
aggregare dati eterogenei
può cambiare
il senso dei risultati

4

FISICA E ASTRONOMIA

La cosa più incomprensibile di questo mondo è
che esso sia comprensibile.

Albert Einstein

Più di ogni altra scienza, la fisica ci mette continuamente di fronte a domande che sembrano semplici, ma che nascondono abissi di complessità. Alcune nascono dall'esperienza quotidiana: come il perché l'acqua calda possa gelare più in fretta di quella fredda, o perché il cielo notturno non sia inondato di luce. Altre, invece, sono state formulate dai grandi pensatori per mettere alla prova i limiti delle nostre teorie: il diavoleto di Maxwell, il paradosso dei gemelli, il celebre gatto di Schrödinger. In tutti i casi, si tratta di enigmi che non solo stimolano la curiosità, ma che hanno contribuito a spingere la scienza verso nuove scoperte.

In questo capitolo ci muoveremo tra esperimenti mentali, intuizioni controintuitive e dilemmi cosmici: dal riscaldamento globale al mistero dei quanti intrecciati, dal destino degli antenati fino alla grande domanda sull'assenza di civiltà extraterrestri. Ogni paradosso è una finestra aperta su un confine della conoscenza, dove la logica comune sembra incrinarsi e la realtà si rivela più sorprendente di quanto immaginiamo.

4.1 LA SCOPERTA DELL'ACQUA CALDA

Nel 1963, in una scuola media della Tanzania, uno studente di nome Erasto Mpemba stava preparando del gelato durante una lezione di cucina. Era rimasto indietro rispetto ai compagni e, senza pensarci troppo, mise il composto di latte ancora caldo nel congelatore. Alla fine della lezione, il suo gelato era già pronto, mentre quello degli altri era ancora liquido. Quando raccontò l'accaduto, fu deriso: sembrava impossibile.

Qualche anno più tardi, Mpemba chiese spiegazioni a Denis Osborne, un professore di fisica in visita alla sua scuola: «Perché l'acqua calda congela più in fretta di quella fredda?». Inizialmente scettico, Osborne ripeté l'esperimento che confermò il fenomeno. I due pubblicarono insieme un articolo scientifico e, da quel momento, quel curioso comportamento dell'acqua è noto come **effetto Mpemba** (figura 22).



In realtà, l'idea che l'acqua calda possa congelare prima di quella fredda non era nuova: Aristotele stesso ne aveva parlato. La scienza moderna ha dimostrato che il fenomeno non ha una spiegazione unica, perché il congelamento dell'acqua è più complesso di quanto sembra. L'effetto Mpemba nasce dall'interazione di diversi meccanismi fisici.

Figura 22: Un esperimento ispirato all'effetto Mpemba: l'acqua calda, lanciata in aria al freddo, ghiaccia all'istante.

- L'evaporazione: l'acqua calda evapora più rapidamente, riducendo il volume di liquido da congelare e accelerando il processo.
- La convezione: nel liquido caldo si formano correnti interne più intense, che favoriscono lo scambio di calore con l'esterno.
- La presenza di gas e sostanze sciolte: riscaldando l'acqua, molti gas e impurità possono sparire, riducendo i punti in cui il ghiaccio può iniziare a formarsi e permettendo così all'acqua di congelare più uniformemente e dunque rapidamente.

L'effetto Mpemba è la prova che la scienza non serve solo nei laboratori: basta osservare con attenzione il mondo intorno a noi per scoprire stranezze sorprendenti e curiosità pronte per essere esplorate.

4.2 IL RISCALDAMENTO GLOBALE

Nell'agosto del 2010, in Groenlandia, un enorme blocco di ghiaccio grande come Manhattan si è staccato da un ghiacciaio ed è finito in mare. Non era mai accaduto in tempi recenti, e le immagini hanno fatto il giro del mondo: un segnale impressionante che qualcosa stava cambiando troppo in fretta.

Negli ultimi cento anni la temperatura media del pianeta è aumentata di circa 1 °C, e il ritmo dell'ultimo mezzo secolo è senza precedenti nella storia geologica. A differenza dei mutamenti naturali del passato, oggi il riscaldamento globale è legato in gran parte alle attività umane: combustibili fossili, deforestazione, trasporti e industria hanno immesso in atmosfera enormi quantità di gas serra. Questi gas (come anidride carbonica e metano) trattengono il calore, un po' come fanno i vetri di una serra per le piante.

Le conseguenze sono visibili: scioglimento di ghiacciai e calotte polari, innalzamento dei mari, eventi estremi più frequenti e difficoltà per molte specie viventi ad adattarsi. Un solo grado in più conta, perché gli equilibri della vita sono fragili: non è solo un rischio per gli animali del Polo Nord, ma anche per l'uomo e per l'ambiente in cui vive.

La Terra si sta riscaldando, ma alcune regioni possono diventare più fredde. Il motivo? Lo scioglimento delle calotte polari altera le correnti a getto, facendo scendere aria artica su zone temperate. Risultato: inverni più rigidi nonostante il clima globale più caldo. Lezione: il riscaldamento globale non significa uniformemente più caldo ovunque; i paradossi climatici nascono dalle differenze regionali e dai meccanismi complessi del sistema Terra.

4.3 PERCHÉ IL CIELO È BUIO?

Nel 1823 l'astronomo Heinrich Olbers pose una domanda semplice solo in apparenza: perché il cielo notturno è buio? Questo interrogativo è ancora noto come paradosso di Olbers, sebbene oggi conosciamo la sua soluzione.

Una stella è come una gigantesca lampada che irradia luce in tutte le direzioni: il Sole è solo una tra le innumerevoli. Affinché il paradosso sia valido, devono essere vere tre ipotesi:

- l'universo ha estensione infinita;

- l'universo è eterno e immutabile;
- l'universo è omogeneo e isotropo, cioè le stelle sono distribuite in modo uniforme ovunque.

Queste condizioni erano accettate dalla cosmologia fino all'inizio del Novecento. Se l'universo fosse davvero infinito, popolato da infinite stelle, ogni direzione dello spazio dovrebbe intercettare la luce di almeno una di esse. Quindi il cielo notturno dovrebbe brillare con la stessa intensità della superficie di una stella vicina: in altre parole, la notte dovrebbe essere luminosa come il giorno.

La luminosità di una stella, infatti, diminuisce con il quadrato della distanza, ma il numero di stelle aumenta con il quadrato della distanza stessa (perché cresce con la superficie delle sfere concentriche). Questi due effetti si compensano, così che, in teoria, la somma della luce di tutte le stelle renderebbe la notte chiara come il giorno. Il fatto che invece il cielo sia buio contraddice l'idea di un universo infinito e statico.

Oggi, grazie alla cosmologia moderna, sappiamo che la seconda ipotesi di Olbers è falsa:

- l'universo non è eterno, ma è nato circa 13,8 miliardi di anni fa con il Big Bang;
- l'universo non è immutabile, ma in continua espansione, come dimostrato da Edwin Hubble nel 1929.

Per quanto riguarda la prima ipotesi, quella dell'estensione infinita, potrebbe essere vera, ma da sola non basta a spiegare il paradosso.,

Infine, la terza ipotesi è confermata: l'universo è effettivamente omogeneo e isotropo su larga scala. Tuttavia, questa caratteristica da sola non è sufficiente a giustificare un cielo notturno completamente luminoso.

Inoltre, la luce ha velocità finita (circa 300 000 km/s), quindi possiamo osservare solo le regioni da cui la radiazione ha avuto il tempo di raggiungerci: è il cosiddetto universo osservabile. Esistono zone più lontane da cui la luce non è ancora arrivata, e l'espansione dell'universo allunga ulteriormente le lunghezze d'onda della luce (*redshift*), rendendole invisibili all'occhio umano.

Il paradosso di Olbers, nato come una contraddizione irrisolvibile, oggi rappresenta una conferma straordinaria delle moderne conoscenze cosmologiche. Il cielo notturno è buio non perché manchino le stelle, ma perché l'universo ha un'età finita, si espande e la luce

delle sorgenti più lontane viene spostata fuori dalla banda visibile. Quello che un tempo sembrava un enigma insolubile è in realtà una finestra aperta sulla storia e sulla struttura dell'universo.

4.4 IL DIAVOLETTA DI MAXWELL

L'universo sembra “scommettere” sul disordine. Un esempio semplice: immagina di far cadere un ditale di colorante in una piscina. Le molecole di colorante non rimarranno raccolte in un grumo, ma tenderanno a diffondersi in tutta l'acqua.

I fisici descrivono questa tendenza contando i modi possibili in cui le molecole possono disporsi. Esiste una sola configurazione in cui tutte restano ammassate, ma innumerevoli miliardi in cui si sparpagliano. Poiché l'universo “sceglie” tra tutti gli stati possibili, è quasi certo che evolverà verso quelli più disordinati.

Questa idea è formalizzata nella seconda legge della termodinamica, che afferma l'inesorabile crescita dell'entropia, cioè del disordine. Ma già nell'Ottocento c'era chi cercava di immaginare modi per infrangerla.

Nel 1867 il fisico James Maxwell propose un esperimento mentale. Immaginiamo una scatola di gas divisa in due compartimenti da un muro con una porticina. Il gas è fatto di particelle: alcune si muovono velocemente (quindi “calde”), altre più lentamente (“fredde”). Ora inseriamo una creatura immaginaria, un piccolo **diavoletto**, che controlla la porticina. Il diavoletto lascia passare solo le particelle veloci da sinistra a destra, mentre lascia passare solo le particelle lente da destra a sinistra. Dopo un po', il compartimento di sinistra conterrà particelle lente e fredde, quello di destra particelle veloci e calde. Il sistema, apparentemente, è diventato più ordinato: l'entropia sembra diminuita. Maxwell aveva così creato un paradosso che sfidava la seconda legge della termodinamica ([figura 23](#)).

Per risolvere il paradosso, potremmo obiettare che il diavoletto ha bisogno di vedere le particelle per capire quanto sono veloci. E per vedere, serve luce. Immaginiamo allora che la scatola sia illuminata da una lampada esterna, che scalda l'ambiente e aumenta l'entropia.

Problema risolto? Non proprio. Possiamo sempre immaginare che il diavoletto usi una piccola torcia, o un sistema più efficiente, per osservare le particelle senza produrre troppo calore. E il paradosso si ripresenta.

Il problema è che il diavoletto non agisce gratis:

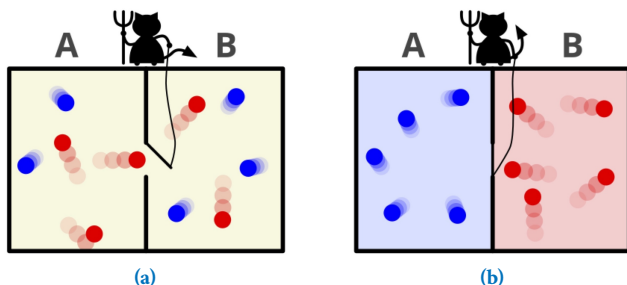


Figura 23: Il diavoleto di Maxwell.

- per distinguere particelle lente e veloci deve **osservarle**, cioè raccogliere informazione;
- deve **memorizzare** questi dati per decidere chi far passare;
- a un certo punto la memoria si riempie e va **cancellata** per poter continuare a funzionare.

Ed è qui che entra in gioco la **termodinamica dell'informazione**.

Nel 1948 Claude Shannon, padre della teoria dell'informazione, mostrò che un messaggio contiene tanto più contenuto informativo quanto maggiore è l'incertezza che elimina. Nel caso del diavoleto, osservare le molecole equivale a ridurre l'incertezza sul loro moto: questo accumula informazione.

Nel 1961 Rolf Landauer dimostrò che **cancellare un bit di informazione ha un costo energetico inevitabile**, che si traduce in un aumento di entropia. Anche un computer, per continuare a calcolare, deve dissipare energia quando cancella o riscrive dati.

Il diavoleto di Maxwell sembra ridurre l'entropia del gas, ma in realtà il suo stesso funzionamento genera entropia:

- osservare e memorizzare costa energia;
- cancellare informazioni aumenta l'entropia dell'ambiente.

Il guadagno apparente nel gas è quindi più che compensato dal disordine prodotto nel processo. La seconda legge della termodinamica resta salva: **non esiste ordine gratuito**.

Il "diavoleto" di Maxwell è un esempio classico che mostra come informazione e termodinamica siano profondamente collegate. Non basta sapere per ridurre l'entropia: ogni informazione ha un prezzo energetico. Come affermava Landauer: l'informazione è fisica.

4.5 GEMELLI DIVERSI

Nel film *Interstellar* di Christopher Nolan c'è una scena che lascia spiazzati: il protagonista, partito per una missione nello spazio, torna e scopre che la figlia è ormai anziana, mentre lui è rimasto giovane. Un capovolgimento dei ruoli che sembra pura invenzione fantascientifica. E invece no: è fisica, è realtà. È l'effetto della relatività di Einstein.

Nel 1905, con la teoria della relatività ristretta, Einstein cambiò radicalmente il nostro modo di pensare al tempo. Prima di lui, il tempo era considerato universale: si pensava che un orologio segnasse lo stesso ritmo ovunque. Einstein mostrò invece che il tempo non è assoluto. Gli orologi non battono tutti alla stessa velocità: un orologio in movimento va più piano rispetto a uno fermo, un concetto che all'epoca parve quasi fantascientifico.

Dieci anni dopo, con la relatività generale, Einstein estese l'idea alla gravità. Non solo il moto, ma anche la vicinanza a un oggetto massiccio rallenta lo scorrere del tempo. Un orologio posto vicino a una grande massa va più piano di uno che si trova lontano.

Per spiegare l'effetto della velocità, il fisico Paul Langevin ideò un celebre esperimento mentale: due gemelli, uno parte per un viaggio nello spazio a una velocità prossima a quella della luce, l'altro resta sulla Terra. Al ritorno, il viaggiatore risulta più giovane del fratello rimasto a casa.

È il cosiddetto **paradosso dei gemelli**, che non è solo teoria. È stato confermato da esperimenti sui **muoni**, particelle elementari prodotte quando i raggi cosmici colpiscono gli strati alti dell'atmosfera. I muoni sono simili a "elettroni grassi": hanno carica negativa ma una massa molto più grande. Sono instabili e decadono in circa due microsecondi, trasformandosi in un elettrone e un neutrino. Con questa durata di vita, dovrebbero percorrere appena mezzo chilometro, eppure li rileviamo sulla superficie terrestre, nonostante l'atmosfera sia spessa circa 15 km. La spiegazione è proprio la dilatazione temporale: per un muone che viaggia quasi alla velocità della luce il tempo scorre più lentamente, e la sua vita media si allunga.

Per chiarire invece la dilatazione gravitazionale, lo stesso Einstein propose un altro esempio. Un gemello vive al mare, l'altro in montagna: quando si ritrovano, quello rimasto al livello del mare è più giovane.

Anche questo fenomeno è stato verificato sperimentalmente. La prima conferma risale al 1959, quando Robert Pound e Glen Rebka misurarono la differenza nello scorrere del tempo fra il tetto e la base di una torre alta appena venti metri. Oggi gli strumenti sono così precisi che è possibile rilevare variazioni di tempo spostando un orologio di un solo metro in altezza.

L'effetto è minuscolo, ma nello spazio diventa rilevante. Il sistema GPS (*Global Positioning System*), che usiamo ogni giorno per orientarci, funziona proprio perché tiene conto della relatività generale. Quando chiediamo la posizione, il ricevitore invia un segnale ai satelliti che orbitano a 20 mila chilometri dalla Terra. I satelliti lo raccolgono, calcolano la posizione e ce la rimandano. Se non si correggesse la differenza di scorrimento del tempo, si introdurrebbe un errore di circa 11 km: non riusciremmo nemmeno a trovare la strada di casa.

Il paradosso dei gemelli, dunque, non è un gioco mentale, ma una conseguenza diretta delle leggi della natura, una delle scoperte più sorprendenti di Einstein. Ci mostra che il tempo non è un flusso uniforme e universale, ma una dimensione elastica, intrecciata con il movimento e la gravità. Un principio che ha reso possibili tecnologie come i satelliti e il GPS, e che ancora oggi continua a sfidare la nostra intuizione.

4.6 IL GATTO DI SCHRÖDINGER

Agli inizi del Novecento la fisica visse una rivoluzione inattesa. Nel 1900 Max Planck introdusse l'idea che l'energia non fosse continua, ma emessa a pacchetti, i *quanti*. Pochi anni dopo Einstein mostrò che anche la luce ha natura quantizzata, spiegando l'effetto fotoelettrico. Da allora emerse una nuova teoria, la **meccanica quantistica**, che descrive il mondo microscopico con regole diverse da quelle della fisica classica. Una teoria che funziona straordinariamente bene, ma che spesso sfida il senso comune.



Figura 24: Il gatto di Schrödinger può essere allo stesso tempo vivo e morto?

Uno dei principi fondamentali è la **sovrapposizione degli stati**: un sistema quantistico può trovarsi in più stati contemporaneamente, finché non viene osservato. Per esempio, un elettrone può avere spin orario e antiorario allo stesso tempo: solo la misura lo “costringe” a scegliere.

Per mostrare la paradossalità dell'idea, nel 1935 Erwin Schrödinger immaginò un esperimento mentale diventato celebre. Un gatto viene rinchiuso in una scatola insieme a un nucleo radioattivo e a un meccanismo collegato a una fiala di veleno: se il nucleo decade, il meccanismo si attiva e il gatto muore.

Poiché il nucleo è un sistema quantistico, dopo un'ora si troverà in una sovrapposizione di due stati, decaduto e non decaduto. E così, finché la scatola resta chiusa, anche il gatto dovrebbe trovarsi in una sovrapposizione di stati: vivo e morto nello stesso tempo (**figura 24**).

Qui sta il cuore del paradosso: la meccanica quantistica, che descrive senza problemi elettroni e atomi, sembra applicarsi anche a un oggetto macroscopico come un gatto, che per noi può essere solo vivo o morto, mai entrambe le cose.

Per risolvere il paradosso possiamo osservare che il gatto interagisce con l'ambiente, e queste interazioni distruggono istantaneamente la sovrapposizione. In pratica, la sovrapposizione esiste solo a livello microscopico. Appena il sistema diventa grande (come un gatto), l'ambiente lo “misura” continuamente, e la sovrapposizione svanisce. Così, nella realtà, il gatto è sempre o vivo o morto, anche se noi non lo sappiamo finché non apriamo la scatola.

Dopo tanti anni, la comunità scientifica discute ancora sul modo migliore di risolvere paradosso. Sembra che Stephen Hawking, uno dei fisici più famosi di tutti i tempi, abbia detto: «**Ogni volta che sento parlare del gatto di Schrödinger, cerco la mia pistola!**».

Einstein non accettava il carattere probabilistico della meccanica quantistica: «**Dio non gioca a dadi**», diceva. Tuttavia, dopo oltre un secolo nessun esperimento ha smentito la meccanica quantistica. «Non tocca a noi dire a Dio come deve far andare il mondo», fu la replica di Bohr. E Stephen Hawking aggiungeva beffardo: «Non solo Dio solo giochi a dadi, ma a volte li lancia dove noi non li possiamo trovare».

Schrödinger non intendeva proporre un esperimento da realizzare, ma mettere in luce la difficoltà di interpretare la teoria. Il suo gatto è rimasto una metafora potente: ci ricorda che il mondo quantistico

non coincide con la nostra intuizione quotidiana, e che tra microscopico e macroscopico c'è ancora un confine sottile, difficile da comprendere.

4.7 INTRECCI QUANTISTICI

Negli anni '30 del Novecento la fisica quantistica stava rivoluzionando la comprensione della natura. La meccanica quantistica spiegava con precisione straordinaria il comportamento di atomi e particelle, ma lasciava aperti dubbi profondi sul suo significato.

La meccanica classica descrive le proprietà della materia su grande scala. La meccanica quantistica, invece, riguarda il comportamento microscopico di singole particelle, che seguono regole controintuitive. Il termine "quantistico" deriva dal latino *quantum*, "quanto", cioè il più piccolo pacchetto indivisibile di una certa grandezza.

Albert Einstein, che pure aveva contribuito alla nascita della teoria con l'effetto fotoelettrico, era sempre più scettico: non gli piaceva che caso e probabilità fossero al cuore della realtà. Celebre la sua frase: «Dio non gioca a dadi».

Nel 1935, a Princeton, Einstein lavorava con Boris Podolsky e Nathan Rosen. Insieme scrissero un articolo destinato a diventare celebre: «La meccanica quantistica descrive per intero la realtà fisica?»

Per illustrare i loro dubbi elaborarono un paradosso. Immagina due particelle che interagiscono e poi si allontanano: secondo la meccanica quantistica rimangono descritte da un unico stato matematico, intrecciate (*entangled*). Se si misura lo spin di una, immediatamente si conosce quello dell'altra (figura 25).

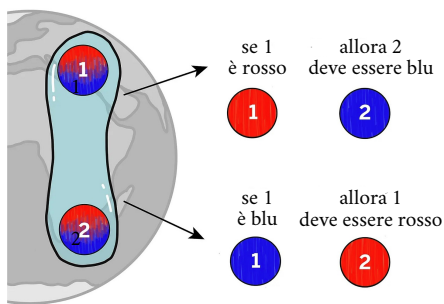


Figura 25: Il paradosso EPR.

È utile un'analogia: se chiudo due guanti in due scatole, appena ne apro una e trovo quello destro, so che nell'altra c'è il sinistro. Ma c'è una differenza cruciale: il guanto destro e il sinistro sono definiti fin

dall'inizio, mentre lo stato quantico delle particelle no. È proprio la misura a fissarlo.

Ed ecco il problema. Secondo la relatività speciale, nessuna influenza può viaggiare più veloce della luce. Eppure qui sembra che un'informazione scatti istantaneamente da una particella all'altra, anche a distanze astronomiche. Einstein definì questo effetto «un'inquietante azione a distanza». Per lui era la prova che la teoria fosse incompleta: dovevano esistere delle variabili nascoste che riportassero ordine e determinismo.

Così nasce il **paradosso EPR** (dalle iniziali dei tre autori): o la meccanica quantistica è incompleta, oppure bisogna accettare che la natura permetta correlazioni non locali, che sembrano sfidare la relatività.

Ma, paradossalmente, l'EPR **non viola la relatività**. *L'entanglement* non consente infatti di inviare segnali più veloci della luce: le correlazioni emergono solo quando i risultati delle misure vengono confrontati, e per farlo serve sempre un canale classico, che rispetta i limiti relativistici. In altre parole, le due particelle non si influenzano a distanza: formano un **unico sistema governato da una sola funzione d'onda**.

Per anni il dibattito restò filosofico. Nel 1964, però, il fisico John Bell propose un criterio concreto: le sue disuguaglianze distinguono tra un universo con variabili nascoste locali (come avrebbe voluto Einstein) e uno descritto dall'*entanglement* quantistico.

Gli esperimenti, dagli anni '80 del Novecento fino a quelli di Alain Aspect e ai più recenti (premiati col Nobel nel 2022), hanno mostrato chiaramente che le disuguaglianze di Bell vengono violate. *L'entanglement* è reale.

Le conseguenze sono enormi:

- La natura non è fatta di pezzi indipendenti che obbediscono a regole locali: esistono correlazioni che sfidano l'intuizione classica.
- L'informazione quantistica diventa una nuova risorsa fisica: oggi parliamo di computer quantistici, crittografia quantistica, teletrasporto quantistico.
- Sul piano filosofico, l'idea di Einstein di un mondo deterministico e locale non regge più. La meccanica quantistica, con tutta la sua stranezza, descrive davvero la realtà.

Nato come un dubbio di Einstein, il paradosso EPR si è trasformato in una delle più grandi conferme della teoria quantistica. Bell e gli esperimenti successivi hanno mostrato che la natura è davvero non locale: le particelle possono restare connesse anche a distanze immense. Da un “problema filosofico” è nata una rivoluzione scientifica e tecnologica, che oggi ci costringe a ripensare cosa intendiamo per realtà.

4.8 LASCIA IN PACE TUO NONNO

Chi non ricorda il celebre film di Robert Zemeckis *Ritorno al futuro?* Il protagonista, Marty McFly, viaggia dal 1985 al 1955 grazie a una macchina del tempo costruita dal suo amico Doc. Appena arrivato nel passato, però, le cose si complicano: senza volerlo, Marty conquista l'attenzione di quella che trent'anni dopo diventerà sua madre, ostacolando così l'incontro con suo padre. Il risultato è un paradosso: se i suoi genitori non si innamorano, Marty non nascerà mai. Ma se non nasce, non può tornare indietro nel tempo a interferire con la loro storia.

Il viaggio nel tempo ha due volti. Anche se per il momento non è tecnicamente possibile farlo, viaggiare nel futuro è compatibile con le leggi della fisica. La relatività di Einstein mostra infatti che il tempo non scorre uguale per tutti: muovendosi a velocità prossime a quella della luce, o vicino a un buco nero, il tempo soggettivo rallenta. Così, per chi viaggia possono passare pochi minuti mentre, nel resto dell'universo, scorrono anni o secoli.

Tornare indietro nel tempo, invece, genera paradossi logici. Il più famoso è il **paradosso del nonno**: se uccidessi tuo nonno prima che abbia figli, tu non potresti nascere. Ma se non nasci, non puoi tornare indietro a compiere quell'azione. Questa contraddizione mina la coerenza causale, ed è il principale ostacolo al viaggio nel passato.

Alcune teorie speculative provano a risolvere il paradosso del nonno. L'ipotesi del multiverso, per esempio, immagina che ogni intervento sul passato generi una nuova linea temporale, distinta da quella di origine. In questo scenario, se davvero uccidessi tuo nonno, non nasceresti in quell'universo, ma continueresti a esistere come viaggiatore proveniente dal tuo mondo di partenza. In questo modo, le conseguenze delle tue azioni non cancellano la tua esistenza, ma aprono semplicemente un'altra realtà.

In definitiva, il viaggio nel futuro trova un solido fondamento nella relatività, mentre quello nel passato rimane terreno di paradossi e speculazioni. Forse la fantascienza continuerà a regalarci storie affascinanti, ma la fisica ci ricorda che il tempo, almeno per ora, è una strada a senso unico.

4.9 DOVE SONO TUTTI?

Nel 1950, durante un pranzo a Los Alamos, Enrico Fermi stava discutendo con alcuni colleghi di dischi volanti e della possibilità di civiltà extraterrestri. All'improvviso pose una domanda tanto semplice quanto disarmante: «Dove sono tutti?». Così nacque quello che oggi chiamiamo il **paradosso di Fermi**: se l'universo è popolato da miliardi di stelle e pianeti, perché non troviamo alcuna traccia di vita intelligente?

Sappiamo che nell'universo esistono almeno 100 miliardi di galassie, ciascuna con centinaia di miliardi di stelle. Oggi, inoltre, abbiamo la certezza che la maggior parte di esse ospita sistemi planetari. Se anche solo l'1% dei pianeti fosse potenzialmente abitabile, nella nostra Via Lattea ci sarebbero centinaia di milioni di mondi idonei alla vita, e nell'intero cosmo miliardi di miliardi. Un numero vertiginoso, che fa immaginare un universo pullulante di civiltà. Eppure non abbiamo nessuna prova della loro esistenza. Da qui la domanda di Fermi.

Una possibile risposta è che la vita sia rara. Nel 1961 Frank Drake propose una celebre equazione per stimare quante civiltà tecnologiche possano esistere nella galassia. L'equazione tiene conto di molti fattori: dal tasso di formazione stellare alla probabilità che la vita si sviluppi, evolva in forme intelligenti e produca tecnologie di comunicazione, fino alla durata di questa fase tecnologica. Alcuni parametri sono ancora speculativi, ma lo strumento resta utile per esplorare scenari possibili. Se la vita è davvero rara, o ancora più rara la sua evoluzione in civiltà comunicanti, allora potremmo essere semplicemente troppo distanti per incrociare altre forme di intelligenza. O forse esse comunicano con modalità a noi inaccessibili, diverse dalle onde radio che cerchiamo.

Un'altra ipotesi chiama in causa il cosiddetto **grande filtro**: una barriera evolutiva che ogni civiltà deve affrontare e che pochissime riescono a superare. Potrebbe trattarsi di catastrofi naturali, ma più verosimilmente di sfide autoindotte: il cambiamento climatico,

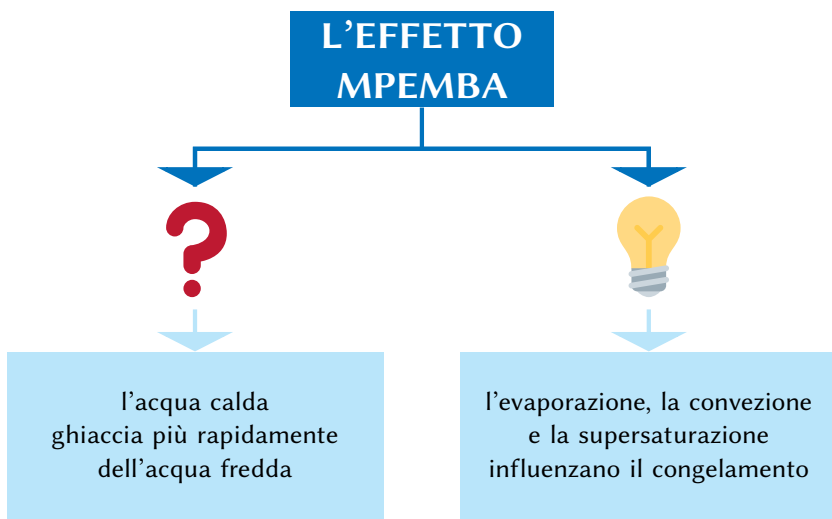
lo sfruttamento delle risorse, le armi di distruzione di massa. La domanda diventa allora inquietante: il filtro è già alle nostre spalle, e siamo sopravvissuti contro ogni probabilità, oppure ci attende nel futuro, pronto a segnare la fine della nostra civiltà?

Un'altra spiegazione è la teoria della **foresta oscura**, resa celebre dal romanzo *Il problema dei tre corpi* di Liu Cixin. In questa visione l'universo somiglia a una foresta notturna, abitata da cacciatori armati e diffidenti. Ogni civiltà, consapevole della potenziale minaccia delle altre, sceglie la strategia più sicura: tacere, non trasmettere segnali, restare nascosta. Il silenzio del cosmo sarebbe allora frutto non del vuoto, ma della paura condivisa di esporsi.

La verità resta ignota. Ciò che sappiamo è che, per ora, il cielo continua a tacere. Ma questo silenzio, più che una risposta definitiva, è un invito a cercare ancora, a guardare più lontano, a porci nuove domande sul nostro posto nell'universo.

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA



MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DEL RISCALDAMENTO GLOBALE



la temperatura media
della Terra aumenta,
ma ci sono luoghi
che diventano più freddi



il clima locale
può comportarsi diversamente
dalla tendenza globale

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DI OLBERS



se l'universo
fosse eterno ed immutabile,
il cielo notturno
sarebbe ovunque luminoso



l'universo
ha avuto un inizio e si espande:
quindi il ragionamento
non vale

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DI MAXWELL



un “diavoletto” ipotetico
può separare
molecole calde e fredde,
diminuendo l'entropia



il lavoro del diavoletto
richiede energia:
il secondo principio della
termodinamica non è violato

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DEI GEMELLI (RELATIVITÀ SPECIALE)



un gemello che viaggia
a velocità relativistica
invecchia meno
di quello rimasto a casa



secondo la teoria
della relatività speciale,
la velocità rallenta
lo scorrere del tempo

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DEI GEMELLI (RELATIVITÀ GENERALE)



un gemello al mare
invecchia meno
del gemello in montagna



secondo la teoria
della relatività generale,
la gravità rallenta
lo scorrere del tempo

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DEL GATTO DI SCHRÖDINGER



un gatto in una scatola
può essere sia vivo sia morto
secondo la fisica quantistica



la sovrapposizione
riguarda le particelle,
non gli oggetti macroscopici

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO EINSTEIN-PODOLSKI-ROSEN



due particelle “intrecciate”
si influenzano all’istante
anche a distanza



l’intreccio
non viola la causalità
e non trasmette informazioni
più velocemente della luce

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DEL NONNO



se viaggi nel tempo
e uccidi il tuo nonno,
non puoi nascere
e quindi non puoi ucciderlo



viaggiare nel passato
è impossibile,
perché viola
le leggi della fisica

MAPPA DI SINTESI

FISICA E ASTRONOMIA

PARADOSSO DI FERMI



nel mondo dovrebbero esserci
molte civiltà intelligenti,
ma non ne osserviamo traccia



la distanza, il tempo
e ragioni di sicurezza
possono spiegare
l'assenza di contatti

5

DEMOCRAZIA

Summum ius, summa iniuria («il diritto estremo è la più grande ingiustizia»).

motto latino

Winston Churchill diceva con ironia che la democrazia, cioè il “governo del popolo”, è la peggior forma di governo, fatta eccezione per tutte le altre.

In questo capitolo analizzeremo i principali limiti della democrazia, concentrandoci su due dimensioni fondamentali: quella **elettorale**, dove il problema è trasformare i voti in rappresentanti, e quella **giuridica**, dove il problema è garantire i diritti.

Nel primo gruppo si collocano il **paradosso di Condorcet**, che mostra come l'esito di una votazione possa dipendere dall'ordine in cui si vota, il **paradosso dell'Alabama**, che rivela anomalie nella distribuzione dei seggi nei sistemi proporzionali, il **gerrymandering**, cioè il disegno strategico dei collegi elettorali a vantaggio di un partito, e il **paradosso dei due gelatai**, che spiega perché in un sistema bipolare i programmi tendano a convergere, annullando le differenze. Nel secondo gruppo si colloca il **teorema di Sen**, che dimostra un'incompatibilità tra le scelte collettive e il pieno rispetto dei diritti individuali.

«La matematica è politica», sostiene Chiara Valerio: interpretare correttamente i dati economici e sociali è essenziale per capire il mondo e diventare cittadini consapevoli.

5.1 VOTI IMPERFETTI

Le elezioni sono il cuore della democrazia. È quello che la distingue dalle autocrazie, dove decide uno solo: nella democrazia, decide la maggioranza. Ma votare non basta. Trasformare le preferenze individuali in una scelta collettiva è un'operazione piena di insidie. Questo paragrafo presenta i principali limiti dei sistemi elettorali.

In un giorno di primavera dell'anno 1794, un improbabile contadino entrò in un'osteria in un paese della campagna francese. A prima

«Contrariamente a quel che si pensa, la matematica non è fatta da geni solitari. Dietro un matematico che scopre una formula, ce ne sono altri con cui ha discusso, ha condiviso la propria teoria, l'ha verificata. La matematica è votata al dialogo, anzi non potrebbe esistere senza. Come la democrazia.»
— Chiara Valerio

vista sembrava un agricoltore come tanti, ma a osservarlo meglio si sarebbero notate le sue mani, troppo curate per essere quelle di un lavoratore della terra.

L'uomo si chiamava Nicolas de Condorcet: oltre a essere nobile, era un matematico che aveva fatto parte del gruppo degli enciclopedisti ed era stato ispettore generale alla zecca di Parigi. Aveva partecipato alla rivoluzione, ma dopo l'avvento al potere dei giacobini era entrato in rotta di collisione con Robespierre, a causa della sua opposizione alla pena di morte per Luigi XVI. Contro Condorcet era stato spiccato un mandato d'arresto: il rischio era di finire ghigliottinati, come accaduto agli altri girondini come lui durante il regime del Terrore.

Condorcet era rimasto alcuni mesi nascosto a Parigi, dove aveva scritto la sua opera più conosciuta, *l'Abbozzo di un ritratto storico dei progressi dello spirito umano*, uno dei capolavori dell'Illuminismo. Poi, convinto di non essere più al sicuro, abbandonò il suo nascondiglio. Fu subito arrestato: era stato tradito per aver chiesto un'omelette con trenta uova. Due giorni dopo fu trovato morto, riverso sul pavimento della sua cella. Un suo amico gli aveva fornito del veleno (una mistura letale di oppio e stramonio, conservato in un anello) e Condorcet l'usò per suicidarsi, per evitare di finire come il suo collega matematico Jean Bailly, condannato a morte per le sue tendenze moderate e linciato dalla folla prima di arrivare alla ghigliottina.

Nel 1785 Condorcet formulò un celebre paradosso sulla democrazia e il suo sistema di voto a maggioranza. Consideriamo per esempio un'elezione in cui tre cittadini debbano scegliere uno fra tre candidati Alice, Bob e Carlo. Supponiamo che il cittadino 1 preferisca Alice a Bob e Bob a Carlo, che il cittadino 2 preferisca Bob a Carlo e Carlo ad Alice, e che il cittadino 3 preferisca Carlo ad Alice e Alice a Bob ([tabella 5](#)).

Tabella 5: Il paradosso di Condorcet.

Elettore	1 ^a scelta	2 ^a scelta	3 ^a scelta
1	Alice	Bob	Carlo
2	Bob	Carlo	Alice
3	Carlo	Alice	Bob

Per passare dalle preferenze individuali dei cittadini a un ordinamento di preferenze sociali che rappresenti la volontà collettiva, potremmo far votare i cittadini applicando la regola della maggio-

ranza. Diremo che il candidato x è socialmente preferito a y se gli elettori che preferiscono x a y sono più degli elettori che preferiscono y a x . Nel nostro caso, Alice è socialmente preferita a Bob, perché gli elettori 1 e 3 preferiscono Alice a Bob, mentre solo l'elettore 2 preferisce Bob ad Alice. Analogamente, Bob è socialmente preferito a Carlo, perché gli elettori 1 e 2 preferiscono Bob a Carlo, e Carlo è socialmente preferito ad Alice.

Se si votano i candidati due a due, se Alice viene votato contro il vincitore fra Bob e Carlo (che è Bob), vince. Ma lo stesso capita a Bob se viene votato contro il vincitore fra Alice e Carlo (che è Carlo), e a Carlo se viene votato contro il vincitore tra Alice e Bob (che è Alice). Il paradosso **non lascia scampo**: il vincitore dipende dall'ordine scelto.

È una situazione analoga al gioco sasso-carta-forbici, in cui ciascuno dei tre segni batte uno degli altri due: in una partita a tre a eliminazione diretta, il vincitore dipende dall'ordine delle partite. Analogamente, il vincitore di un'elezione può dipendere dall'ordine con cui si vota (figura 26).

Il paradosso si presentò nelle elezioni presidenziali statunitensi del 1976, quando Jimmy Carter vinse su Gerald Ford, che aveva ottenuto la *nomination* repubblicana vincendo su Ronald Reagan, ma i sondaggi dicevano che Reagan avrebbe vinto su Carter (come poi accadde effettivamente nel 1980, anche se con un elettorato diverso). E il paradosso si è ripresentato nel 2016, quando Donald Trump ha vinto su Hillary Clinton, che aveva vinto la *nomination* democratica su Bernie Sanders, che di nuovo avrebbe vinto su Trump, sempre secondo i sondaggi.



Figura 26: Il gioco sasso-carta-forbici e il paradosso di Condorcet.

Gerald Ford aveva la fama di essere poco intelligente. Il suo predecessore Lyndon Johnson disse di lui che era «incapace di masticare una gomma e camminare contemporaneamente».

Dato che il voto a maggioranza su più di due scelte è un sistema largamente applicato in assemblee locali, nazionali e sovranazionali, il paradosso è importante: se l'esito di un'elezione dipende dall'ordi-

ne con cui si vota, il vincitore delle elezioni viene determinato dal sistema elettorale anziché dai soli voti degli elettori. Il paradosso di Condorcet spiega, fra l'altro, le battaglie procedurali sull'ordine delle votazioni, a volte essenziali per indirizzare il risultato finale nella direzione voluta.

Per rimediare agli effetti del paradosso di Condorcet sono stati elaborati diversi sistemi di voto. Per esempio, si possono far concorrere i candidati nel turno iniziale e prevedere un ballottaggio tra i due vincitori (in Italia, questo sistema si usa per eleggere i sindaci dei comuni maggiori, se nessuno dei candidati ha ottenuto la maggioranza assoluta dei voti). O si può dare a ogni elettore la possibilità di dare più voti, da assegnare ai candidati in base all'ordine di preferenza (negli Stati Uniti questo sistema di voto si usa spesso per attribuire premi sportivi).

Tuttavia, si dimostra matematicamente che **nessun sistema di voto, per quanto ben congegnato, può risolvere tutti i problemi del voto a maggioranza**. Il più famoso di questi teoremi l'ha dimostrato Kenneth Arrow nel 1951. Arrow ha enunciato tre principi basilari e condivisi della democrazia: la libertà di scelta (gli elettori possono classificare i candidati nell'ordine di preferenza che vogliono), la dipendenza dal voto (il risultato di una votazione dev'essere determinato solo dai voti espressi dai votanti) e l'unanimità (un candidato che prende tutti i voti deve vincere). Arrow si è poi chiesto se esista un sistema elettorale che soddisfi questi tre requisiti. Purtroppo, la risposta è negativa: Arrow ha dimostrato che un sistema del genere non esiste.

Il teorema di Arrow prova che nel caso delle elezioni c'è un **conflitto tra democrazia e rappresentanza**, nel senso che una democrazia non può garantire che gli eletti siano scelti solo in base alla quantità di voti ottenuti. Anche se il risultato di Arrow è un *teorema*, per esorcizzarlo lo si chiama spesso *paradosso*. Questo non ha impedito che diventasse oggetto di studi approfonditi, che ora formano la cosiddetta *teoria delle scelte sociali*. Né ha distratto il comitato di Stoccolma, che nel 1972 assegnò ad Arrow il premio Nobel per l'economia.

Il fatto che un teorema di scienze politiche come quello di Arrow gli abbia fruttato un premio Nobel per l'economia non deve stupire. Per la sua natura astratta, il risultato si applica a qualunque situazione in cui sia necessaria una scelta collettiva fra un insieme limitato di possibilità. Per esempio: di prodotti in un mercato, di politiche

aziendali in un consiglio di amministrazione, di rappresentanti in un'assemblea di azionisti e così via.

5.2 IL SEGGIO CONTESO

Istituito nel 1789, il parlamento degli Stati Uniti d'America si chiama Congresso ed è formato da due Camere: la Camera dei rappresentanti, l'equivalente della nostra Camera dei deputati, e il Senato. Entrambe le Camere si trovano nel palazzo del Campidoglio a Washington, la capitale degli Stati Uniti. Ogni Stato elegge alla Camera dei rappresentanti un numero di deputati proporzionale alla sua popolazione (da 53 per la California a uno per l'Alaska), ma sempre lo stesso numero di senatori (due) al Senato.

La diversa composizione del Congresso è frutto di un compromesso. I Padri fondatori erano divisi tra chi avrebbe voluto che il parlamento fosse eletto in base alla popolazione dei vari Stati e chi invece sosteneva l'identica rappresentanza per tutti gli Stati membri. La soluzione è stata presa a modello da molti stati federali: secondo alcuni studiosi, uno Stato federale è identificato proprio dalla presenza di una seconda Camera rappresentativa degli Stati federati.

Tutto a posto, dunque? Non proprio. Infatti quando si assegnano i seggi nella Camera dei rappresentanti si ottengono numeri decimali. Per esempio, immaginiamo di dover assegnare dieci seggi a tre Stati (**tabella 6a**), i primi due con una popolazione di sei milioni di abitanti e il terzo con una popolazione di due milioni di abitanti. Facendo i calcoli, ai primi due Stati toccherebbero 4,29 seggi ciascuno, mentre al terzo ne toccherebbero 1,42.

Tabella 6: Il paradosso dell'Alabama.

(a) Con dieci seggi.

Stato	Abitanti	Quota	Seggi
A	6 000 000	4,29	4
B	6 000 000	4,29	4
C	2 000 000	1,42	2

(b) Con undici seggi.

Stato	Abitanti	Quota	Seggi
A	6 000 000	4,71	5
B	6 000 000	4,71	5
C	2 000 000	1,58	1

«Gli uomini hanno assunto talmente l'abitudine di obbedire ad altri uomini, che, per la maggior parte, la libertà è il diritto di essere sottomessi solo a maestri da loro scelti.»
— Nicolas de Condorcet

I Padri fondatori decisero di assegnare i seggi considerando innanzitutto la parte intera della proporzione e assegnando poi i seggi rimasti agli Stati con le parti decimali più grandi. Nel nostro esempio, ai primi due Stati spettano quattro seggi ciascuno (la parte intera di 4,29), mentre al terzo ne spettano due (la parte intera di 1,42 più l'ultimo seggio, perché 0,42 è più grande di 0,29).

Immaginiamo di aumentare i seggi da dieci a undici. Potremmo aspettarci che uno Stato guadagni un seggio, ma non è così (**tabella 6b**): allo Stato più piccolo ora spetta un solo seggio (la parte intera di 1,58), mentre agli altri due Stati ne spettano cinque ciascuno (la parte intera di 4,71 più uno dei due seggi rimasti, perché 0,71 è più grande di 0,58). Dato che la parte decimale dei due Stati più grandi è cresciuta di più di quella dello Stato più piccolo, lo Stato più piccolo ha perso un seggio a vantaggio degli altri due.

Il paradosso si è presentato per la prima volta nel 1880, quando si decise di portare il numero dei seggi della Camera da 299 a 300. Ci si aspettava che uno Stato avrebbe guadagnato un seggio. Invece accadde che due Stati (il Texas e l'Illinois) ebbero un seggio in più, mentre l'Alabama ne perse uno (**tabella 7**).

Tabella 7: Quando la Camera dei rappresentanti passò da 299 a 300 seggi, l'Alabama perse un seggio (passò da 8 a 7), mentre il Texas (da 9 a 10) e l'Illinois (da 18 a 19) ne guadagnarono uno ciascuno.

Stato	Camera di 299	Camera di 300
Alabama	7,646	7,671
Texas	9,640	9,672
Illinois	18,640	18,702

Per mitigare l'effetto del paradosso, oggi si usano dei sistemi di calcolo proporzionale "corretti". Tuttavia, nel 1982 **Michel Balinski** e **Peyton Young** hanno dimostrato che *qualunque* metodo di suddivisione dei seggi (con almeno sette seggi e quattro Stati) produce inevitabilmente il paradosso.

Ci sono altri due paradossi simili al paradosso dell'Alabama: il paradosso della popolazione e il paradosso del nuovo Stato.

- Nel **paradosso della popolazione** può capitare che la popolazione di uno Stato cresca ma che lo Stato perda un seggio a favore di un altro Stato la cui popolazione è cresciuta di meno. Il paradosso si verificò nel 1900 quando la Virginia perse un

Per Laurent Schwartz matematica e politica sono inscindibili: «I matematici portano il rigore del ragionamento nella vita quotidiana, e la scoperta matematica, poco condizionata dall'autorità, è sovversiva e infrange tabù».

seggio a favore del Maine, la cui popolazione era cresciuta di meno.

- Nel **paradosso del nuovo Stato** può capitare che aggiungendo dei seggi per far posto a un nuovo Stato, uno Stato perda un seggio. Il paradosso si verificò nel 1907, quando l'Oklahoma entrò a far parte degli Stati Uniti. Per farle posto, alla Camera dei rappresentanti vennero aggiunti cinque nuovi seggi, con il risultato che New York perse un seggio a favore del Maine.

Il teorema dimostrato da Balinski e Young dimostra che in *qualunque* sistema di ripartizione dei seggi si presenta almeno uno dei tre paradossi (dell'Alabama, della popolazione o del nuovo Stato). In altre parole, il teorema prova che c'è un conflitto fra democrazia e rappresentanza, nel senso che una democrazia non può garantire che tutti i collegi, o tutti i partiti, prendano sempre quanto loro spetta in base alla consistenza numerica della propria popolazione, e dei propri voti.

5.3 IL GERRYMANDERING

Il fatto che ci siano modi per manipolare l'esito di un'elezione è noto da secoli. Uno di questi modi è il *gerrymandering* (dall'inglese *Gerry*, nome proprio, e *salamander*, "salamandra"), un metodo per ridisegnare i confini dei collegi in un sistema elettorale maggioritario. Questo sistema fu inventato nel 1812 dal politico statunitense Elbridge Gerry, governatore del Massachusetts. Gerry sapeva che in una regione ci possono essere parti della popolazione, ben localizzabili, favorevoli a un partito o a un politico. Quindi disegnò un nuovo collegio elettorale con confini molto tortuosi, incorporando parti della popolazione a lui favorevoli ed escludendo parti a lui sfavorevoli, per garantirsi la rielezione. Le linee del collegio erano così irregolari da farlo sembrare una salamandra (da cui la seconda parte del nome).

La **figura 27** mostra il *gerrymandering* in azione. Supponiamo che in una città competano due partiti, il partito dei rossi e il partito dei blu, e che il partito dei blu abbia la maggioranza nel 60% dei seggi elettorali. Supponiamo inoltre di dover aggregare i seggi per formare cinque collegi elettorali. A seconda di come vengono aggregati i seggi, i blu possono vincere in tre collegi su cinque, o in tutti e cinque i collegi o addirittura perdere contro i rossi.

Per avere un'idea di come andrà il voto in una specifica area, basta analizzare la composizione demografica, il reddito, la natura urbana

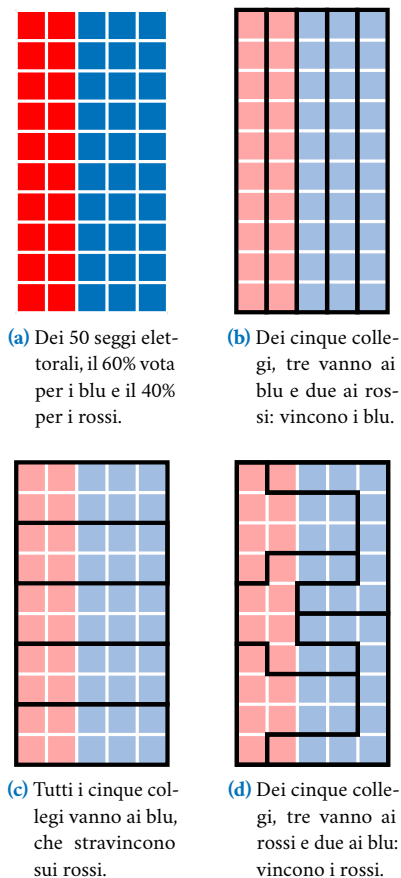


Figura 27: Il *gerrymandering* in azione.

o rurale e l'esito delle elezioni precedenti di quell'area. Se chi ha il potere di ridisegnare i collegi elettorali vuole far vincere uno o l'altro partito, gli basta ridisegnare opportunamente i vari collegi.

Per impedire il *gerrymandering* si può imporre un vincolo alla forma dei collegi elettorali, che non devono essere troppo frastagliati. O permettere ai cittadini di fare ricorso se ritengono che una modifica ai confini dei collegi possa distorcere il voto.

Con la tua accezione di paradosso = controintuitivo, il *gerrymandering* lo è a pieno titolo. Infatti la nostra intuizione "democratica di base" è: chi prende più voti, prende più seggi. Il *gerrymandering* rovescia questa aspettativa: un partito o una coalizione può ottenere meno

voti totali, ma grazie al disegno dei collegi ottenere più seggi. Quindi è un “paradosso” (qualcosa che sorprende e sembra illogico).

5.4 I DUE GELATAI

Su una spiaggia lunga un chilometro ci sono due gelatai. Inizialmente i gelatai decidono di dividersi equamente i clienti e si mettono a 500 metri l'uno dall'altro, ciascuno a 250 metri da un estremo della spiaggia. Questa disposizione è la più conveniente per i bagnanti, che devono camminare al massimo 250 metri sotto il sole per comprarsi un gelato.

Dopo un po', però, un gelataio si avvicina al centro della spiaggia, per sottrarre clienti al concorrente. La sua idea è la seguente: i bagnanti all'estremità più vicina continueranno a servirsi da lui, anche se dovranno camminare per più di 250 metri, mentre quelli al centro troveranno ora più comodo servirsi da lui e non dal suo concorrente. L'altro gelataio, però, se ne accorge e si sposta verso il centro della stessa distanza, ristabilendo l'equilibrio, anche se i bagnanti che si trovano alle estremità devono camminare per più di 250 metri per comprarsi un gelato. La cosa si ripete, finché i due gelatai si trovano entrambi al centro della spiaggia. A questo punto, non c'è motivo per preferire un gelataio all'altro. Questa disposizione non è la più conveniente per i bagnanti: quelli che si trovano alle estremità devono camminare per 500 metri sotto il sole per comprarsi un gelato, una distanza che può scoraggiarli dall'acquisto (figura 28).

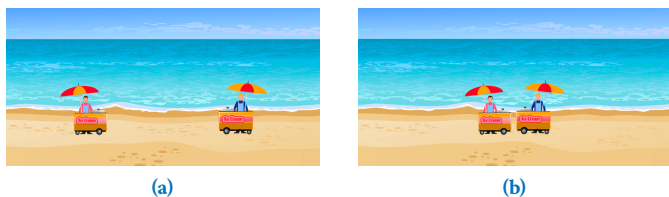


Figura 28: Il paradosso dei due gelatai.

Il paradosso, formulato da Harold Hotelling nel 1929, spiega quello che spesso accade durante le elezioni: **i due gelatai rappresentano le coalizioni di destra e di sinistra** che per avere più voti (vendere più gelati) cercano di **guadagnare consensi al centro**. Alla fine i

programmi non si distinguono più l'uno dall'altro e gli elettori che si trovano agli estremi, insoddisfatti, non vanno più a votare.

5.5 DIRITTI NEGATI

Oltre al voto, la democrazia deve garantire i diritti personali. Ma che cosa accade quando la volontà della maggioranza entra in conflitto con le libertà individuali? Il teorema di Amartya Sen, noto come “teorema dell'impossibilità del liberalismo”, mostra che questo conflitto può essere insanabile.

Sen lo dimostra con un esempio minimo: due persone, Anna e Bruno. La questione è se Anna possa leggere un certo libro a casa sua. Anna vuole leggerlo, mentre Bruno trova quel libro offensivo e preferisce che non venga letto da nessuno, nemmeno in privato.

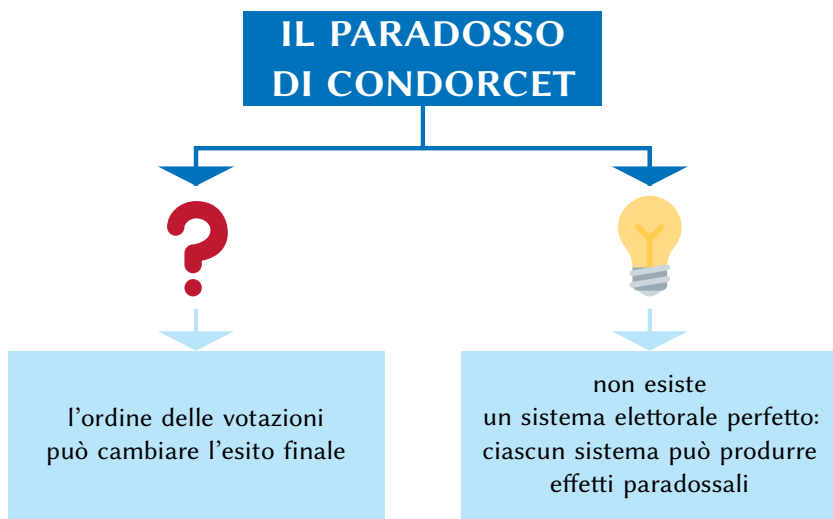
Supponiamo ora che la società decida in modo democratico: si vota. Anna vota a favore, Bruno contro. Il risultato è un pareggio. Se la regola collettiva stabilisce che, in caso di pareggio, si blocca l'azione (cioè il libro non si legge), allora la volontà collettiva impedisce ad Anna di leggere, anche se è una scelta personale e privata. Per evitarlo, dovremmo riconoscere ad Anna un diritto individuale inviolabile su questa decisione. Ma così facendo, la scelta di Anna prevale sulla volontà collettiva, e la democrazia viene sospesa.

Sen dimostra che questo conflitto è inevitabile: non esiste un sistema che rispetti sempre sia la libertà individuale sia la volontà della maggioranza. Anche una democrazia perfettamente razionale può produrre decisioni ingiuste.

Questo problema non riguarda solo esempi astratti. Un altro caso emblematico è quello della distribuzione della ricchezza. Nel mondo, circa il 10% della popolazione possiede la stessa ricchezza del restante 90%. Se si potesse decidere democraticamente, una redistribuzione più equa verrebbe approvata a larga maggioranza. Tuttavia, i diritti di proprietà, tutelati come diritti fondamentali in molte democrazie, impediscono che questo accada. In questo caso, la protezione delle libertà individuali (dei più ricchi) prevale sull'interesse collettivo (dei più poveri). Ancora una volta, si manifesta il conflitto fra democrazia e diritti individuali.

MAPPA DI SINTESI

DEMOCRAZIA



MAPPA DI SINTESI

DEMOCRAZIA

IL PARADOSSO DELL'ALABAMA



aumentando i seggi,
uno stato può riceverne meno
anche se è più popolato



non esiste
una soluzione perfetta:
il sistema di ripartizione
può produrre paradossi

MAPPA DI SINTESI

DEMOCRAZIA

IL PARADOSSO DEL *GERRYMANDERING*



il vincitore di un'elezione
può dipendere
dalla ripartizione dei collegi



non esiste
una soluzione perfetta:
la ripartizione dei collegi
può influenzare il risultato

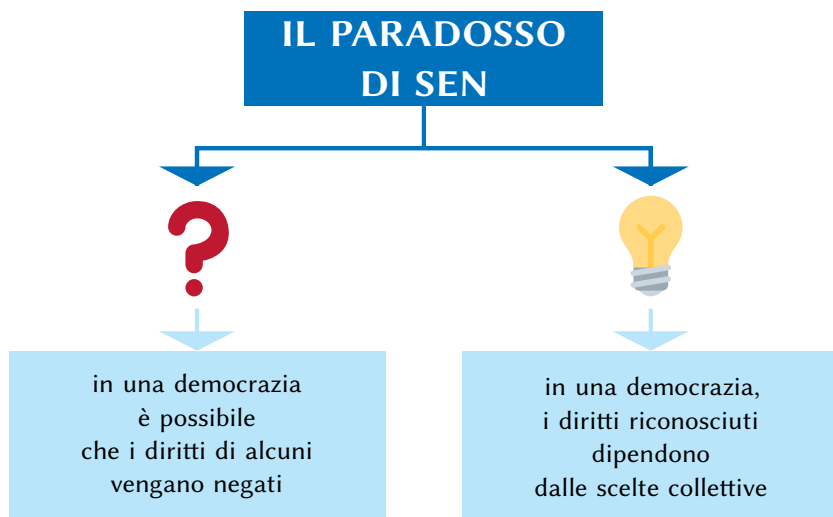
MAPPA DI SINTESI

DEMOCRAZIA



MAPPA DI SINTESI

DEMOCRAZIA



6

ECONOMIA E SOCIETÀ

La banca è un posto dove ti prestano soldi se puoi provare che non ti servono..

Bob Hope

L'economia non è fatta soltanto di numeri, grafici e formule: spesso ci mette di fronte a paradossi che sfidano l'intuizione e mettono in crisi le nostre certezze. Dietro a decisioni quotidiane come investire, risparmiare o semplicemente scegliere, si nascondono dilemmi che mostrano i limiti della razionalità umana e le sorprese della logica economica. Dal gioco d'azzardo di San Pietroburgo al dilemma dei prigionieri, dal traffico delle città al misterioso destino degli aerei scomparsi, ogni paradosso apre una finestra inattesa sul rapporto tra economia e società, rivelando come la ricerca della felicità, della convenienza o della sicurezza possa condurre a risultati inattesi, e talvolta opposti a quelli sperati.

6.1 PARADOSSI ECONOMICI

Dietro i grafici e le leggi di mercato si nasconde una verità scomoda: l'economia è fatta di persone, non di equazioni. Gli economisti hanno scoperto che spesso le scelte individuali deviano dalla logica del profitto, seguendo emozioni, abitudini e percezioni distorte. Questi paradossi rivelano i limiti della razionalità economica e mostrano come anche un piccolo errore di valutazione possa ribaltare interi modelli teorici.

6.1.1 Acqua e diamanti

Perché mai l'acqua, indispensabile alla sopravvivenza, costa così poco, mentre i diamanti, del tutto inutili per vivere, hanno un prezzo così alto? Questo è il **paradosso del valore**, formulato in modo sistematico da Adam Smith, ma già presente nei dialoghi di Platone.

Il Dalai Lama sostiene che il fine della vita sia la felicità, intesa non come piacere materiale, ma come trasformazione della mente attraverso compassione, pazienza e saggezza.

Il paradosso mostra che il prezzo di un bene non dipende solo dalla quantità di lavoro necessaria per produrlo. In realtà, il prezzo è influenzato anche da fattori come la **rarietà** del bene e, soprattutto, dalla sua **utilità marginale**, cioè dal grado di soddisfazione che un'unità aggiuntiva di quel bene è in grado di offrire al consumatore.

L'economista Eugen von Böhm-Bawerk illustrò questo concetto con l'esempio di un contadino che possiede cinque sacchi di grano.

- Con il primo sacco, fa il pane necessario per sopravvivere.
- Con il secondo, produce pane extra per lavorare.
- Con il terzo, nutre gli animali della fattoria.
- Con il quarto, distilla whisky.
- Con il quinto, dà da mangiare ai piccioni.

Se un sacco gli venisse rubato, non ridurrebbe ogni attività di un quinto, ma rinunciarebbe all'uso meno importante: nutrire i piccioni. Dunque, il valore marginale di un sacco di grano è pari alla soddisfazione che deriva da quell'ultimo impiego.

Applicando lo stesso ragionamento al paradosso dell'acqua e dei diamanti, si capisce che non è l'utilità totale a determinare il prezzo, ma quella marginale. L'acqua ha un'utilità complessiva enorme, poiché senza di essa non potremmo vivere, ma è così abbondante da avere un'utilità marginale bassa: un bicchiere in più non cambia quasi nulla. I diamanti, al contrario, sono rari. Quindi un singolo diamante aggiuntivo ha un'utilità marginale molto più alta.

In condizioni normali, le persone attribuiscono dunque un valore maggiore ai diamanti, e sono disposte a pagarli di più. Tuttavia, se un uomo si trovasse a morire di sete nel deserto, la situazione si invertirebbe: per lui, l'acqua avrebbe un'utilità marginale infinitamente superiore a quella dei diamanti.

6.1.2 La felicità

«**Un ciclista è un disastro per l'economia:** non compra auto e non prende soldi in prestito per comprarne. Non paga polizze assicurative. Non compra carburante, non paga per mantenere e riparare l'auto. Non paga i parcheggi. Non provoca incidenti gravi. Non chiede autostrade a più corsie. Non diventa obeso. Non compra medicine. I ciclisti sono persone sane che non servono all'economia. Non aggiungono nulla al prodotto interno lordo del paese. Invece ogni nuovo *fast food* genera posti di lavoro: oltre ai commessi, dà

lavoro a cardiologi, dentisti e dietologi. Camminare, poi, è ancora peggio: i pedoni non comprano nemmeno una bicicletta.»

La citazione precedente, spesso attribuita al direttore di una grande banca, è probabilmente apocrifa. Tuttavia, essa mostra perfettamente che il prodotto interno lordo (abbreviato PIL), definito come il valore dei beni e dei servizi prodotti in un paese in un anno, di solito considerato fondamentale per l'economia di un paese, è in realtà un indicatore rudimentale e miope, e non tiene conto di altri fattori altrettanto fondamentali, come il benessere della popolazione.

Per esempio, il fumo miete ogni anno quasi centomila vittime in Italia e sei milioni il tutto il mondo (un morto ogni sei secondi): eppure, il commercio di tabacco contribuisce al PIL dei paesi del mondo per oltre trecento miliardi di euro (venti miliardi solo in Italia). Per non parlare della compravendita di armi, per cui i governi spendono ogni anno oltre cinquecento miliardi di euro.

Il PIL è dunque solo *un* aspetto del benessere, da affiancare ad altri indicatori non meno importanti, quali il tasso di sopravvivenza, l'alfabetizzazione, l'occupazione, l'assistenza agli anziani, la vita media, eccetera. Bisognerebbe dunque sostituire il PIL con altri indici: per esempio, gli "indici non convenzionali" proposti dai due premi Nobel per l'economia Amartya Sen e Joseph Stiglitz. Oppure con la FIL (Felicità Interna Lorda), adottata dal Bhutan, un stato montuoso dell'Asia incastrato fra la Cina e l'India, per valutare il benessere della popolazione. Alla base di questi indicatori c'è un'intera tradizione economica, iniziata nel Settecento con il "calcolo felicistico" di Jeremy Bentham.

Gli economisti hanno scoperto che quando il PIL di una nazione aumenta, i suoi abitanti non diventano per questo più felici. Il parole povere: i soldi non danno la felicità. È il **paradosso di Easterlin**, formulato nel 1974 dall'economista Richard Easterlin. Già Adam Smith diceva che la capacità di godere dei beni è fisiologicamente limitata, e quindi il ricco può consumare poco più del povero.

Il paradosso si manifesta soprattutto nei paesi caratterizzati da forti disuguaglianze economiche. In questi contesti, l'aumento della ricchezza tende ad accentuare le disparità sociali preesistenti. Al contrario, nei paesi con piccole disuguaglianze, una maggiore ricchezza si traduce in un incremento del benessere per l'intera popolazione.

Il Italia i fumatori sono oltre dieci milioni. Ciascuno di loro spende più di mille euro l'anno in sigarette, per un totale superiore ai dieci miliardi di euro. Tre quarti di questa spesa finiscono nelle casse dello Stato. Il bilancio si chiude con circa centomila morti all'anno causati dal fumo.

6.1.3 L'effetto rossetto

Negli anni '30 e '40 del Novecento, durante la Grande Depressione, le donne statunitensi affrontavano le difficoltà economiche di ogni giorno. I vestiti costosi e i gioielli erano ormai fuori portata, ma un piccolo lusso restava accessibile: il rossetto. Nonostante la crisi, le vendite di rossetti aumentarono, mentre tutto il resto del mercato crollava. Era come se un piccolo gesto, un tratto di colore sulle labbra, potesse restituire un senso di controllo e dignità, una piccola consolazione in tempi duri. Questo fenomeno curioso, apparentemente illogico, divenne noto come **effetto rossetto**: in tempi di ristrettezze economiche, i consumatori tendono a spendere di più per piccoli lussi simbolici, sfidando l'idea che in crisi si taglino tutti gli acquisti non necessari.

6.1.4 Domanda e offerta

In economia ci sono vari fenomeni che sfidano la logica comune. Un esempio classico sono le patate durante la crisi agricola che colpì l'Irlanda negli anni '40 dell'Ottocento. Le famiglie povere dipendevano quasi esclusivamente da questo alimento essenziale: quando il prezzo delle patate aumentava, invece di comprarne meno, ne acquistavano di più, perché dovevano rinunciare ad altri cibi più costosi per sopravvivere. Questo fenomeno, noto come effetto Giffen, contraddice la legge della domanda e dell'offerta, secondo cui più un bene costa meno se ne compra, e più un bene è economico più se ne acquista.

Al contrario, alcuni beni diventano più desiderabili proprio quando aumentano di prezzo. È il caso dei beni di lusso, come orologi o borse firmate: il prezzo alto aumenta il prestigio e la domanda cresce, fenomeno chiamato effetto Veblen.

Altri paradossi, meno noti ma altrettanto curiosi, sono l'**effetto snob** (simile all'effetto Veblen, ma inverso: alcune persone smettono di acquistare un bene se diventa troppo comune, perché vogliono distinguersi) e l'**effetto carrozzone** (il contrario dell'effetto snob: la domanda aumenta quando molti altri consumatori acquistano un bene, anche se il prezzo sale).

In tutti i casi precedenti, necessità, desiderio e psicologia si intrecciano, mostrando che l'economia è piena di paradossi: quello che sembra irrazionale spesso ha una logica nascosta.

6.1.5 San Pietroburgo

Si narra che a San Pietroburgo, ai tempi degli zar, esistesse un casinò dove si poteva partecipare al gioco seguente. Le regole erano semplici. Si lanciava una moneta. Se usciva testa, il giocatore vinceva un euro (originariamente, un rublo). Se invece usciva croce, si rilanciava la moneta. A quel punto, se usciva testa, la vincita saliva a due euro. In caso di una seconda croce, si procedeva con un terzo lancio: se qui usciva testa, si vincevano quattro euro. Il meccanismo continuava così, raddoppiando la vincita potenziale a ogni nuovo lancio, finché non usciva testa. In quel momento, il gioco si concludeva e il premio accumulato veniva incassato. Subito dopo, si poteva iniziare una nuova partita.

A questo punto sorge spontanea la domanda: quanto saremmo disposti a pagare per partecipare a una singola partita? Un euro sembrerebbe una spesa accettabile per chiunque: nella peggiore delle ipotesi, esce subito testa e si recupera esattamente quanto investito. Ma spenderemmo dieci euro?

Analizziamo le probabilità. La probabilità che la partita termini al primo lancio, con una vincita di un euro, è pari a $1/2$. La probabilità che si arrivi al secondo lancio e che esca testa è $1/4$ (cioè $1/2 \times 1/2$), con una vincita di due euro. Al terzo lancio la probabilità di vincere quattro euro scende a $1/8$, e così via: le probabilità diminuiscono, ma le vincite raddoppiano ogni volta.

Secondo il calcolo delle probabilità, la vincita media attesa, indicata con M , si calcola sommando tutti le possibili vincite, ciascuna moltiplicato per la rispettiva probabilità. Cioè:

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Ogni termine della somma precedente vale $1/2$, per cui la somma è infinita. Quindi, in teoria, si dovrebbe essere disposti a pagare qualsiasi cifra per partecipare, anche un milione di euro, perché prima o poi potrebbe capitare una vincita tanto elevata da compensare tutte le perdite precedenti.

Tuttavia, nella realtà, nessuna persona sensata accetterebbe di pagare cifre elevate per una singola partita. Di solito, si è disposti a spendere solo pochi euro. Ecco il paradosso: pur essendo il valore atteso del gioco teoricamente infinito, la disponibilità reale a pagare resta molto limitata. Questo è il celebre **paradosso di San Pietroburgo**, formulato da Daniel Bernoulli nel 1738.

Blaise Pascal si rese conto che la teoria delle probabilità poteva servire anche a calcolare premi e rischi nelle assicurazioni. Qualcuno lo prese in giro, chiamandolo «il matematico che misura la vita con i dadi». Ma proprio da queste intuizioni nacque la matematica delle assicurazioni.

Il rifiuto intuitivo a investire grosse cifre nel gioco è sostenuto dalle simulazioni fatte al computer. Ripetendo migliaia di volte la serie di lanci, di solito si ottengono all'inizio vincite di qualche euro. Poi la media delle vincite aumenta, grazie a qualche serie fortunata. Nel complesso, la media è crescente (e tenderà all'infinito continuando a giocare), ma nelle simulazioni la media delle vincite è solo di una decina di euro.

Per risolvere il paradosso, Bernoulli osservò che il gioco presupponeva che il banco disponesse di risorse illimitate, cosa irrealistica: dopo cinquanta lanci favorevoli consecutivi, un evento raro ma possibile, la vincita supererebbe la ricchezza totale della Terra.

Introducendo un limite massimo alla vincita, il valore medio atteso si riduce drasticamente. Se indichiamo con T il tetto massimo che il banco può pagare, allora il numero massimo di teste consecutive ammesse, che chiameremo n , è il numero tale che moltiplicando per due se stesso n volte si ottiene T (cioè, $2 \times 2 \times \dots \times 2 = T$, con n fattori). In pratica, per arrivare a T bisogna raddoppiare 1 un certo numero di volte, e n è proprio quel numero di raddoppi necessari. A quel punto il gioco si interrompe e ricomincia da capo. In questa situazione, la vincita media è data dalla somma:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n+1 \text{ volte}} = \frac{n+1}{2}$$

Per esempio, se il banco può pagare al massimo mille euro, allora servono circa dieci raddoppi per arrivare a quella cifra (perché $2^{10} = 1024$), e quindi la vincita media sarà poco più di cinque euro. Se il tetto è di un milione di euro, servono circa venti raddoppi (dato che $2^{20} \approx 1\,000\,000$) e la vincita media sale a circa dieci euro. Per un miliardo di euro servono circa trenta raddoppi, con una vincita media di circa quindici euro.

Un altro modo per risolvere il paradosso consiste nel tener conto del fatto che nemmeno le risorse dei partecipanti sono illimitate. Già Bernoulli aveva intuito che il valore del denaro non è assoluto, ma dipende da quanto se ne possiede: una stessa somma vale infatti di più per chi ha poco e di meno per chi ha tanto.

Bernoulli introdusse i concetti di **utile atteso**, definito come il valore (soggettivo) che attribuiamo a un bene, e di **utile marginale**, definito come l'utile portato dall'ultima unità ottenuta di quel bene. Di regola, all'aumentare del consumo di un bene il suo utile marginale

Negli anni '40 del Novecento alcuni matematici si accorsero che giochi come blackjack e roulette potevano essere descritti con schemi probabilistici. I casinò furono tra i primi a capire che "conoscere la matematica" significava ridurre le perdite e aumentare i profitti. I tavoli verdi si rivelarono veri e propri laboratori di matematica applicata.

diminuisce: è il principio alla base dell'esperienza per cui «l'ultimo cioccolatino dà meno soddisfazione del primo».

Nel caso del paradosso di San Pietroburgo, se usiamo un'opportuna funzione di utilità, per esempio proporzionale non al denaro vinto ma al suo logaritmo, otteniamo che l'utile atteso, e dunque il prezzo giusto da pagare per partecipare al gioco, è un valore non infinito, ma ragionevolmente basso.

La soluzione proposta da Bernoulli, però, non è del tutto soddisfacente. Infatti possiamo immaginare un gioco di San Pietroburgo con vincite che aumentano molto velocemente con il numero di lanci, in modo che l'utile atteso torni a essere infinita. Questo nuovo paradosso, chiamato "super paradosso di San Pietroburgo", si risolve considerando funzioni di utilità che hanno un valore massimo limitato, oppure imponendo un limite alle vincite.

Tre uomini, uno semplice, uno istruito e uno astuto, guardano una moneta lanciata cento volte, tutte teste. Il semplice dice: «Ora deve uscire croce» L'istruito: «La moneta non ha memoria: testa o croce, sempre cinquanta e cinquanta». L'astuto sorride: «Scommetto testa. Una moneta che dà testa cento volte? È truccata».

6.2 PARADOSSI SOCIALI

Quando più individui interagiscono, le logiche personali si intrecciano fino a produrre risultati collettivi inattesi. Dalla cooperazione alla competizione, dalla fiducia alla diffidenza, i paradossi sociali ci mostrano come il comportamento del singolo possa rafforzare o indebolire il benessere comune. Studiare queste dinamiche significa capire non solo l'economia, ma anche la complessità dei rapporti umani.

6.2.1 Il dilemma del prigioniero

Ma perché gli atleti si dopano? Perché, nonostante i rischi medici e legali, non scelgono di competere in modo leale? In fondo, se nessun atleta si dopasse, nessuno avrebbe un vantaggio sugli altri, e tutti correrebbero a pari condizioni, come succede se tutti si dopano.

Ce lo spiega il **dilemma del prigioniero**, un gioco proposto da Merrill Flood e Melvin Dresher nel 1950. Il titolo e la versione attuale si devono ad Albert Tucker.

Il dilemma è il seguente. La polizia arresta due sospettati, Alice e Bob. Dato che non ha prove sufficienti per incastrarli, li rinchiude in due celle diverse e li interroga, offrendo loro la scelta seguente. Se uno confessa e l'altro non confessa, chi non ha confessato sconterà dieci anni di carcere mentre l'altro sarà libero. Se confesseranno entrambi, allora la polizia li condannerà a cinque anni di carcere. Se invece

entrambi non confesseranno, la pena da scontare sarà pari a un anno di carcere (figura 29). Nessuno dei due prigionieri conosce la scelta dell'altro.

I prigionieri sono davanti a un dilemma. Se potessero concordare di non confessare (in modo vincolante), allora ciascuno verrebbe condannato a un solo anno di carcere. Ma non possono comunicare e, anche se potessero farlo, potrebbero fidarsi l'uno dell'altro?

		Alice	
		confessa	non confessa
Bob	confessa	5 5	0 10
	non confessa	10 0	1 1

Figura 29: Il dilemma del prigioniero.

Per ciascun prigioniero la scelta più conveniente è confessare. Infatti se Alice confessa, a Bob conviene confessare perché così sconterebbe cinque anni di carcere, come Alice, anziché dieci. Se invece Alice non confessa, a Bob conviene a maggior ragione confessare perché così facendo sarebbe libero, mentre Alice sconterebbe dieci anni di carcere. Dunque i prigionieri confessano e scontano entrambi cinque anni di carcere. In questo modo si realizza l'**equilibrio di Nash**, definito da John Nash nel 1950: nessuno dei due soggetti cambierebbe la sua decisione se scoprisse la decisione dell'altro, né avrà motivo di pensare, anche con il senno di poi, di aver potuto fare una mossa migliore.

L'aspetto paradossale della situazione è che, pur essendo quella ottimale indipendentemente dalla scelta dell'avversario, non è però la migliore delle situazioni possibili: se i prigionieri non confessassero, infatti, sconterebbero entrambi un solo anno di carcere, e non cinque. In altre parole, il dilemma del prigioniero porta a un equilibrio che non è l'**ottimo paretiano**, definito da Vilfredo Pareto nel 1896: si verifica quando non si può migliorare la condizione di un soggetto senza peggiorare la condizione di un altro.

Se pensiamo a due atleti in competizione come ai due prigionieri, alla confessione come al doping e alla negazione come alla competizione leale, il dilemma mostra come per i due atleti sia inevitabile ricorrere al doping, anche se non è la scelta ottimale per nessuno dei due. In questa situazione, ciascun atleta è spinto a doparsi per non essere svantaggiato rispetto all'altro, anche se l'ideale sarebbe competere in

modo leale. La scelta individuale, purtroppo, non porta al miglior esito collettivo, e così il doping diventa quasi inevitabile, anche se è una soluzione che non giova a nessuno nel lungo periodo.

Un'altra applicazione del dilemma del prigioniero riguarda la corsa agli armamenti durante la Guerra Fredda. Dopo la seconda guerra mondiale, le due superpotenze vincitrici, gli Stati Uniti e l'Unione Sovietica, entrarono in una dura competizione politica e militare. La posta in gioco era il primato sul mondo. La tensione che ne risultò, durata circa mezzo secolo, non si concretizzò mai in un conflitto militare diretto, tanto che si usa l'espressione "guerra fredda" per indicarla.

Presto iniziò una micidiale corsa agli armamenti. I sovietici costruirono una loro bomba atomica, dopo quella che gli americani avevano sganciato su Hiroshima e Nagasaki. In risposta, gli americani costruirono un'arma nucleare ancora più distruttiva, la bomba all'idrogeno, subito emulati dai sovietici.

La spesa militare mondiale arrivò a superare i **mille miliardi di dollari l'anno**, e le due superpotenze raggiunsero **una capacità di distruzione superiore a quella necessaria per radere al suolo l'intera Terra**. Si instaurò un "equilibrio del terrore": ciascuna superpotenza era trattenuta dall'attaccare l'altra dalla prospettiva di una guerra nucleare che avrebbe distrutto il mondo. L'economia degli Stati Uniti fu in grado di sostenere lo sforzo, mentre l'Unione Sovietica non fu in grado di reggere il confronto e collassò (anche) sotto il peso dei problemi finanziari.

Perché le due superpotenze, anziché seguire la strada della corsa al riarmo, non adottarono una politica di disarmo bilanciato e di coesistenza pacifica? Ce lo spiega il **dilemma del prigioniero**, un gioco proposto da Merrill Flood e Melvin Dresher nel 1950. Il titolo e la versione attuale si devono ad Albert Tucker.

Se pensiamo agli Stati Uniti e all'Unione Sovietica come ai due prigionieri, alla confessione come all'armamento nucleare e alla negazione come al disarmo unilaterale, il dilemma descrive come per i due paesi fosse inevitabile al tempo della guerra fredda la corsa agli armamenti, benché questo risultato non fosse ottimale per nessuna delle due superpotenze (e per il mondo intero).

Il dilemma del prigioniero si applica anche agli **acquisti online**. Nel commercio elettronico da un lato c'è chi mette merce sul mercato e dall'altro chi desidera acquistarla. Se ciascuno cerca la strategia ottimale, indipendentemente dalle azioni dell'altro, il venditore e

il compratore si trovano di fronte a un paradosso: al compratore conviene non pagare perché se il venditore non gli manda la merce non perde nulla e se gliela manda ci guadagna, mentre al venditore conviene non spedire la merce ordinata perché se l'acquirente non paga non perde nulla e se paga ci guadagna.

Paradossalmente, sembra che, nel contesto degli acquisti online, la soluzione migliore sia che il compratore non paghi e il venditore non mandi la merce. Tuttavia, se tutti adottassero questa strategia, non ci sarebbe alcun mercato.

La soluzione del paradosso è che il ragionamento funziona solo per un solo acquisto o una sola vendita. Alla lunga, barare non conviene, perché il compratore e il venditore vengono espulsi dal mercato. Se si vuole stare sul mercato, bisogna cooperare.

Il dilemma del prigioniero dimostra dunque che a volte **è meglio cooperare che contrapporsi**. Come diceva John Nash, «Per cambiare, bisogna agire insieme».

6.2.2 La tolleranza

Negli anni '30 del Novecento in Germania la Repubblica di Weimar era una democrazia tollerante, con libertà di parola, di stampa, di associazione. Il partito nazista sfruttò proprio quella apertura: usò i diritti garantiti per guadagnare consenso. Quando i nazisti arrivarono al potere, eliminarono progressivamente le libertà democratiche, perseguitarono oppositori e minoranze. Così l'intolleranza sfruttò la tolleranza per distruggerla. Questo è uno degli esempi storici più chiari del paradosso dell'intolleranza.

Il **paradosso dell'intolleranza**, formulato dal filosofo Karl Popper, afferma che una società completamente tollerante rischia di essere distrutta dalla stessa tolleranza se permette l'esistenza e la diffusione dell'intolleranza senza alcun limite. In altre parole, se una società tollera tutti gli intolleranti (quelli che rifiutano il dialogo e mirano a sopprimere opinioni diverse) rischia di perdere le sue stesse libertà, poiché gli intolleranti, una volta in posizione di potere, potrebbero eliminare ogni forma di dissenso. Per preservare una società libera e aperta, è quindi necessario essere intolleranti verso l'intolleranza, almeno quando questa si manifesta in forme violente, oppressive o antidemocratiche. Non si tratta di censura arbitraria, ma di una difesa razionale dei valori su cui si fonda la convivenza civile.

6.2.3 Il traffico

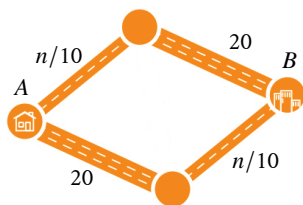
Immaginiamo di essere in auto, pronti a iniziare un lungo viaggio. Senza navigatore, dobbiamo decidere il percorso: istintivamente sceglieremmo l'autostrada, ma siamo sicuri che sia la scelta migliore? La risposta non è immediata dato che riguarda il traffico, un sistema complesso che non obbedisce alle leggi dell'intuizione ma a quelle della teoria dei giochi, una disciplina matematica che studia le decisioni di un soggetto in conflitto con altri soggetti rivali.

Il traffico è un fenomeno collettivo frutto delle scelte individuali dei singoli automobilisti, ciascuno dei quali cerca di minimizzare il tempo speso in auto, senza curarsi del comportamento degli altri. La mancanza di coordinazione tra gli automobilisti può produrre effetti paradossali, come quello proposto nel 1968 da Dietrich Braess: se gli automobilisti non cooperano, la costruzione di una nuova strada può addirittura peggiorare i tempi medi di percorrenza.

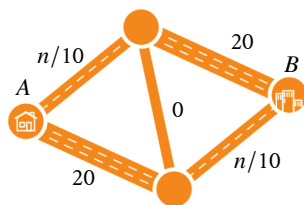
Supponiamo infatti che per andare dalla città *A* alla città *B* ci siano due strade, la Nord e la Sud. Per percorrere la strada Nord servono $n/10$ minuti nel primo tratto, dove n è il numero di automobili sulla strada, e 20 minuti nel secondo tratto, mentre per percorrere la Sud servono 20 minuti nel primo tratto e $n/10$ minuti nel secondo (figura 30a). Ogni giorno 200 auto partono dalla città *A* per raggiungere *B*. Dato che per percorrere le due strade serve lo stesso tempo, in media metà degli automobilisti sceglierà la strada Nord e l'altra metà la Sud. In questo modo ciascun automobilista impiegherà in media $10 + 20 = 30$ minuti per arrivare a destinazione.

Supponiamo ora che venga costruita una superstrada velocissima che collega la strada Nord alla strada Sud (figura 30b), il cui tempo di percorrenza è pari a 0 minuti. Al singolo automobilista conviene ora percorrere il primo tratto della strada Nord, che richiede *al massimo* $200/10 = 20$ minuti contro i 20 minuti esatti del primo tratto della Sud, poi percorrere la superstrada e infine percorrere il secondo tratto della Sud, che richiede *al massimo* $200/10 = 20$ minuti contro i 20 minuti esatti del secondo tratto della Nord. Ciascun automobilista penserà al proprio tornaconto e tutti sceglieranno il nuovo percorso: per andare da *A* a *B* serviranno allora $200/10 + 0 + 200/10 = 40$ minuti contro i 30 precedenti.

Il paradosso si presentò a Londra nel 1975, quando per decongestionare il traffico fu costruita la circonvallazione M25 intorno alla città: la nuova strada fu subito molto trafficata e oggi è famosa per i suoi ingorghi e i molti incidenti. E si ripresentò a New York



- (a) Se ci sono 200 auto che devono andare da A a B, metà degli automobilisti sceglierà la strada Nord e l'altra metà la Sud. In questo modo ciascun automobilista impiegherà 30 minuti per arrivare a destinazione.



- (b) Ora a ciascun automobilista conviene percorrere il primo tratto della strada Nord, poi percorrere la superstrada e infine percorrere il secondo tratto della Sud. In questo modo ciascun automobilista impiegherà 40 minuti.

Figura 30: Il paradosso di Braess in azione: la costruzione di una nuova strada può peggiorare i tempi medi di percorrenza.

nel 1990, quando per un incidente si dovette chiudere al traffico la quarantaduesima strada, una delle vie più importanti di Manhattan: sorprendentemente, in quell'occasione si osservò un miglioramento complessivo della fluidità del traffico nell'area circostante.

Il paradosso di Braess si può applicare a casi diversi dal traffico veicolare. Per esempio, un ostacolo di fronte all'uscita principale di una stanza o di un edificio può rendere più rapido il deflusso degli occupanti in caso di panico. In questo caso il paradosso è rovesciato: mentre una condizione apparentemente migliorativa del traffico (la costruzione di una nuova strada) può rivelarsi peggiorativa (il tempo di viaggio complessivo aumenta), qui una condizione intuitivamente peggiorativa (l'ostacolo) può rivelarsi migliorativa (il tempo di deflusso dalla stanza diminuisce).

Anche la folla è un sistema complesso, i cui membri si comportano in modo non cooperativo. Dato che è impossibile obbligare i membri a coordinarsi tra loro, bisogna agire sui loro comportamenti. L'ostacolo obbliga i membri a scegliere percorsi alternativi per aggirarlo e spinge la folla a separarsi in prossimità dell'uscita. In questo modo si evita che tutti si buttino sull'uscita principale, provocando un ingorgo umano che rallenta la fuga.

6.2.4 Com'è piccolo il mondo!

Il 31 dicembre 2019 la Cina comunicava la diffusione di alcuni casi di polmoniti atipiche di origine virale nella città di Wuhan. Pochi

giorni dopo l'annuncio, veniva identificato il virus responsabile: era l'atto di nascita di una nuova malattia, detta Covid-19 (dall'inglese *COronaVirus Disease 19*, "malattia da coronavirus 2019").

Nel febbraio del 2020 sono apparsi i primi casi in Italia. Dopo pochi giorni c'erano centinaia di casi confermati. Per l'Italia era l'inizio della prima devastante ondata, a cui si è cercato di rimediare con il *lockdown* nazionale a partire da domenica 8 marzo. Il virus si diffondeva rapidamente in tutto il mondo e l'epidemia dilagava. L'11 marzo l'Organizzazione Mondiale della Sanità dichiarava ufficialmente lo stato di pandemia.

La pandemia di Covid-19 ci ha mostrato quanto velocemente può diffondersi un virus. Com'è possibile che un evento iniziato in un luogo tanto lontano abbia delle conseguenze su di noi in un tempo così breve?

Una possibile spiegazione è data dalla **teoria del mondo piccolo**: ogni persona può essere collegata a qualunque altra persona attraverso una catena di conoscenze con non più di cinque intermediari, per un totale di sei gradi di separazione (**figura 31**).

Proviamo per esempio a contare le **strette di mano che ci separano dal presidente degli Stati Uniti**. Possiamo stringere la mano del nostro candidato di fiducia alle elezioni comunali, che a sua volta può stringere la mano a un consigliere comunale, poi abbiamo il sindaco, il segretario nazionale del suo partito, il presidente della Repubblica e infine il presidente degli Stati Uniti. **Sei contatti in tutto**. Con una rockstar, un attore o un premio Nobel la "legge" non cambia.



Figura 31: La teoria del mondo piccolo.

La teoria è stata formulata per la prima volta nel 1929 dallo scrittore Frigyes Karinthy. Nel 1967 lo psicologo Stanley Milgram, ha verificato sperimentalmente l'ipotesi, selezionando un gruppo di statunitensi e chiedendo loro di spedire un pacchetto a un estraneo che abitava in uno altro Stato, a migliaia di chilometri di distanza. Ciascuno di loro conosceva il nome del destinatario e la zona in cui risiedeva, ma non l'indirizzo preciso. I partecipanti hanno spedito il proprio pacchetto a una persona conosciuta, che secondo loro aveva più probabilità di conoscere il destinatario finale. L'intermediario avrebbe fatto lo stesso, e così via, finché il pacchetto non fosse stato

consegnato al destinatario finale. Milgram si aspettava per completare la catena sarebbero stati necessari almeno un centinaio di passaggi, ma in media ce ne vollero solo sei. Nel 2001 Duncan Watts ha ripetuto l'esperimento di Milgram su Internet, usando un'email come "pacchetto" da consegnare a diverse persone nel mondo: il numero medio di passaggi è stato effettivamente sei.

La cosa, a prima vista sconcertante, è però plausibile. Tutti infatti conosciamo almeno 50 persone, quindi siamo collegati ad almeno 2500 persone da due gradi di separazione, a 125 mila da tre, a oltre sei milioni da quattro, a oltre 300 milioni da cinque e a oltre 15 miliardi da sei. Dato che al mondo ci sono molto meno di 15 miliardi di persone, la teoria è provata. O forse no, perché spesso gli amici dei nostri amici sono già nostri amici. Il che significa che le 2500 persone che in teoria dovrebbero essere a due gradi di separazione da ciascuno di noi sono in pratica molto meno. Quindi la scoperta di Milgram è davvero sorprendente.

La soluzione del problema è che a far diminuire drasticamente il grado di separazione della "rete" bastano pochi individui con qualche conoscenza fuori dalla solita cerchia ristretta. Per esempio, appena un europeo conosce un americano si stabilisce un ponte tra l'Europa e l'America, e si abbassa drasticamente il grado di separazione tra i due continenti, rendendo il mondo un "villaggio globale", come diceva Marshall McLuhan. Questa connessione permette, per esempio, **una velocissima trasmissione** delle notizie e delle mode, ma anche **delle epidemie e dei contagi**.

Nel 1994 l'attore statunitense Kevin Bacon dichiarò che ormai a Hollywood aveva lavorato con tutti o, almeno, con qualcuno che aveva lavorato con loro. Alcuni studenti lo presero sul serio e inventarono il gioco "Sei gradi di Kevin Bacon", basato sulla teoria dei sei gradi di separazione: l'obiettivo era dimostrare che ogni attore hollywoodiano era effettivamente collegato a Bacon da cinque intermediari al massimo.

Gli studenti introdussero il "numero di Bacon", cioè il numero dei gradi di separazione che separa un attore qualsiasi da Bacon. Kevin Bacon ha numero di Bacon 0, ogni attore che ha partecipato a un film con Bacon ha un numero di Bacon 1, ogni attore che ha lavorato con un attore della lista precedente ha un numero di Bacon 2, e così via. Anche in matematica c'è un numero simile: è il numero di Erdős, riferito a Paul Erdős, matematico molto prolifico e con una vastissima lista di collaboratori.

Il gioco degli studenti confermò la teoria dei sei gradi di separazione. Nel 2007 Kevin Bacon, coinvolgendo altre celebrità di Hollywood, fondò l'onlus *SixDegrees*, che promuove i principi di solidarietà sociale in base all'idea che, dopotutto, viviamo in un piccolo pianeta

MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA

IL PARADOSSO DELL'ACQUA E DEI DIAMANTI



l'acqua è essenziale
ma costa poco,
i diamanti sono inutili
ma costano molto



il prezzo dipende dalla rarità
e dall'utilità marginale,
non dall'utilità totale

MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA

IL PARADOSSO DELLA FELICITÀ



un aumento di ricchezza
non porta sempre
a un aumento della felicità



La felicità
dipende da come stiamo dentro
e dai rapporti con gli altri,
non solo dai soldi

MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA



MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA

PARADOSSO DI SAN PIETROBURGO



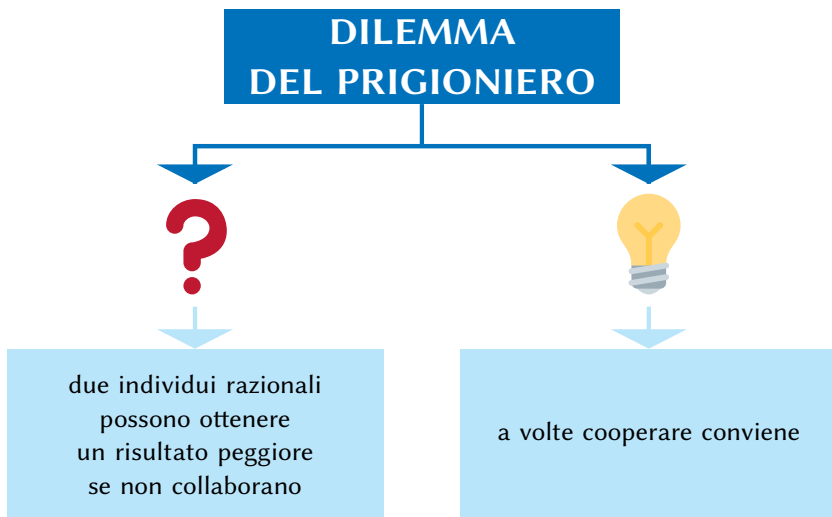
la vincita attesa è infinita,
ma nessuno pagherebbe tanto
per partecipare



il valore del denaro
non è assoluto, ma dipende
da quanto se ne possiede

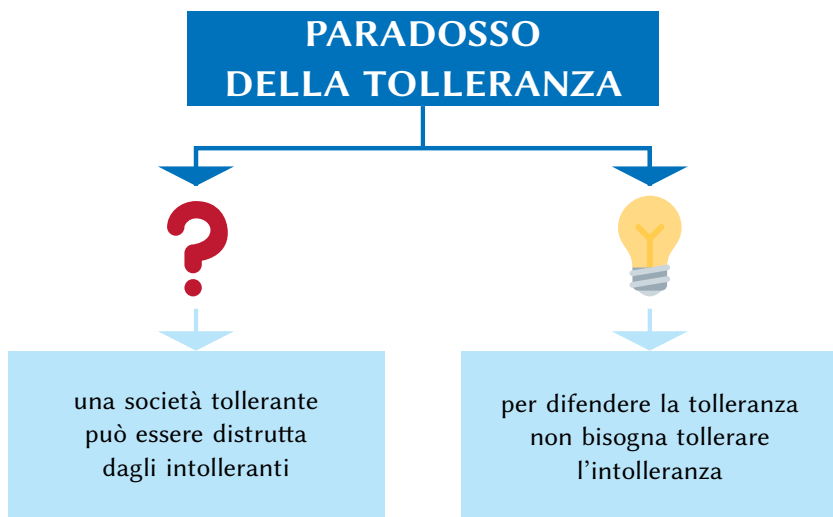
MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA



MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA



MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA



MAPPA DI SINTESI

ECONOMIA

PARADOSSO DEL MONDO PICCOLO



in una rete sociale,
due persone qualsiasi
sono collegate da pochi
passaggi, tipicamente sei



i pochi legami
fra gruppi distanti
bastano
per rendere piccolo il mondo

Non tutto ciò che vediamo è vero, e non tutto
ciò che è vero possiamo vederlo.

anonimo

La mente gioca brutti scherzi. In questo capitolo ne vedremo alcuni: l'iperconnessione che isola, l'eccesso di informazione che confonde, la nostalgia per un passato idealizzato, l'illusione di sapere più di quanto si sa e il potere della mente di curare il corpo. Piccoli paradossi quotidiani che mostrano quanto sia sottile il confine tra ragione e illusione.

7.1 CONNESSI, MA SOLI

Nel 1991, l'astronauta russo Sergey Krikalev era a bordo della stazione spaziale MIR. Durante la sua missione, l'Unione Sovietica crollò. Questo significava che, mentre era in orbita, la nazione a cui apparteneva semplicemente non esisteva più. Tutti i sistemi di supporto e i contatti a terra continuarono a funzionare, ma politicamente e socialmente era isolato: le persone a Terra erano impegnate nella loro nuova realtà e la sua "patria" era sparita.

Nonostante avesse radio, video e comunicazioni con la Terra, Krikalev descrisse una sensazione di profonda solitudine: era un uomo sospeso nello spazio, circondato da altre persone (l'equipaggio), con contatti quotidiani con centri di controllo e giornali che parlavano di lui, ma di fatto, dal punto di vista della sua identità e del suo ruolo nel mondo, era completamente solo. Quando finalmente rientrò sulla Terra, era rimasto in orbita per 311 giorni, il periodo più lungo di un astronauta fino a quel momento, e raccontò di aver percepito quanto la tecnologia e la comunicazione ci possano mettere in contatto costante, ma non eliminare la sensazione di solitudine quando manca un senso di appartenenza reale e stabile.

Il **paradosso dell'iperconnessione** descrive una condizione tipica della nostra epoca: pur essendo costantemente collegati a migliaia di persone tramite social, chat e videochiamate, molti sperimentano un crescente senso di isolamento. La comunicazione digitale ha abbattuto le barriere spazio-temporali, ma ha spesso sacrificato la profondità delle relazioni a favore della quantità di contatti, trasformando il bisogno di appartenenza in una ricerca compulsiva di visibilità e approvazione. Ne deriva una solitudine diffusa, alimentata da interazioni superficiali e da un presente perennemente frammentato, dove la riflessione e l'intimità sembrano dissolversi.

L'iperconnessione, lungi dal favorire comunità solide, amplifica l'atomizzazione sociale e riduce la comunicazione a mera esibizione. Se la rivoluzione digitale ha offerto vantaggi innegabili, dalla possibilità di mantenere legami a distanza all'accesso illimitato alle informazioni, non ha eliminato il prezzo da pagare: ansia, alienazione e perdita di qualità nelle relazioni.

Invertire questa tendenza implica distinguere tra connessioni superficiali e legami autentici, ponendo attenzione al valore dell'ascolto, del dialogo e della presenza diretta. L'iperconnessione può assumere un ruolo positivo solo se integrata in un uso consapevole delle tecnologie, capace di bilanciare l'immediatezza digitale con la qualità delle relazioni interpersonali.

7.2 TROPPI DATI, NESSUN DATO

Duecentocinquanta milioni di email inviate. Nove milioni di ricerche su Google. Settanta milioni di messaggi scambiati su WhatsApp. Tre milioni di contenuti pubblicati su Facebook e Instagram. Tutto ciò (e molto altro) è quello che accade **ogni minuto** su Internet.

C'è però un piccolissimo problema: il tempo a nostra disposizione è un limitato ed è impossibile fruire di tutto quello che viene pubblicato, o anche solo di quello che ci interessa.

Il fenomeno è noto come **paradosso dell'informazione** o **sovraccarico informativo**: la quantità di informazioni supera la capacità della mente di elaborarle. Troppa informazione, in pratica, equivale a nessuna informazione. Le conseguenze possono essere confusione, stress, indecisione e persino rinuncia a scegliere.

L'eccesso di contenuti rende difficile orientarsi e selezionare quello che è rilevante e attendibile, attività che richiede tempo, competenze critiche e strumenti di filtraggio sempre più sofisticati. Il sovraccarico

informativo facilita inoltre la diffusione di disinformazione e *fake news*, che prosperano in un contesto in cui la quantità di messaggi prevale spesso sulla qualità.

A livello cognitivo, il fenomeno si manifesta come un disturbo: si passa sempre più tempo online, saltando da un contenuto all'altro alla ricerca di informazioni sempre più aggiornate e complete, senza riuscire a fermarsi. All'inizio la scoperta di nuove informazioni può suscitare piacere ed eccitazione, ma presto si instaura un circolo vizioso: ciò che si trova non basta più, e la ricerca di ulteriori informazioni diventa percepita come un obbligo e una necessità. In questo flusso incessante, ogni minuto porta con sé novità e opportunità, ma anche la consapevolezza che non si potrà mai arrivare a tutto.

7.3 ERA MEGLIO QUANDO ERA PEGGIO

Nel 1945 l'Italia era un paese distrutto dalla guerra, con città rase al suolo, un'economia in rovina e una popolazione stremata. In questo contesto di difficoltà, molti italiani iniziarono a guardare al passato con una certa nostalgia. Anche se il regime fascista aveva portato con sé repressione e privazioni, alcuni rimpiangevano la "stabilità" di quei tempi. Questo sentimento di rimpianto per un passato percepito come migliore si tradusse nell'espressione «si stava meglio quando si stava peggio», un modo di dire che catturava la contraddizione tra le difficoltà reali del passato e la percezione idealizzata di esso. Da allora, la frase «si stava meglio quando si stava peggio» si usa per esprimere una nostalgia per il passato, suggerendo che, nonostante le difficoltà vissute, la vita allora sembrava più semplice rispetto al presente.

Il paradosso nasce dalla memoria selettiva e dalla percezione soggettiva del tempo: tendiamo a ricordare il passato attraverso una lente idealizzata, enfatizzando i momenti piacevoli e minimizzando le difficoltà reali, così da creare un'immagine di semplicità e tranquillità che spesso non corrisponde alla realtà. Questo fenomeno è noto come **paradosso della nostalgia**.

Il paradosso diventa ancora più evidente nell'era della tecnologia. Ogni nuova innovazione promette di semplificare la vita e ampliare le possibilità: Internet, smartphone, intelligenza artificiale, automazione. Eppure, con questi strumenti arrivano anche complessità inattese, pressioni sociali costanti, sovraccarico di informazioni e una sensazione diffusa di essere sempre connessi e mai davvero liberi.

Così, pur vivendo in un'epoca di progresso e comodità senza precedenti, molti sentono che la vita era più semplice «quando si stava peggio». Il paradosso non sta quindi nella realtà oggettiva del passato, ma nella tensione tra percezione e realtà: mentre le tecnologie modernizzano e potenziano la nostra esistenza, allo stesso tempo ci ricordano quanto la felicità sia fragile e spesso legata a una nostalgia che ci fa desiderare un tempo che, in realtà, non era così perfetto come lo ricordiamo.

La frase è un monito: il progresso non garantisce automaticamente serenità, e ogni innovazione porta con sé nuovi problemi da affrontare.

7.4 L'EFFETTO DUNNING-KRUGER

Il 6 gennaio del 1995, a Pittsburgh, un uomo rapinò due banche a volto scoperto. Arrestato poche ore dopo, spiegò con stupore di non capire come fosse stato identificato: convinto dal consiglio di un amico, si era cosparsa il viso di succo di limone, credendo che questo lo avrebbe reso invisibile alle telecamere di sorveglianza.

L'episodio, tanto assurdo quanto emblematico, attirò l'attenzione degli psicologi David Dunning e Justin Kruger, che decisero di approfondire la questione con una serie di esperimenti. Ai partecipanti furono proposti test di logica e grammatica: i risultati mostrarono che le persone meno competenti tendevano a sopravvalutare le proprie capacità, mentre quelle più competenti si valutavano sotto il loro effettivo livello.

Nacque così l'**effetto Dunning-Kruger**: chi possiede scarse conoscenze in un campo tende a sopravvalutarsi, mentre chi ha acquisito competenza riconosce meglio i propri limiti. Secondo i due studiosi, questo accade perché per accorgersi delle proprie mancanze è necessaria una soglia minima di competenza. Chi non la raggiunge non è consapevole dei propri errori e si percepisce più capace di quanto non sia realmente. Al contrario, chi ha una conoscenza più solida comprende la complessità della materia e, paradossalmente, finisce per dubitare delle proprie abilità.

Il percorso della consapevolezza segue un andamento tipico. All'inizio prevale un'eccessiva fiducia in sé stessi, che porta spesso a decisioni impulsive e talvolta dannose. Segue una fase di riflessione, in cui si prende coscienza dei propri limiti: questo passaggio evoca il motto socratico «So di non sapere». Infine, con l'accumulo di

esperienza, si raggiunge una visione più equilibrata e realistica delle proprie capacità.

Nella vita di tutti i giorni si possono osservare diversi esempi dell'effetto Dunning-Kruger: il principiante che si avvicina agli investimenti convinto di poter dominare il mercato, salvo poi subire gravi perdite, oppure l'automobilista che si ritiene un guidatore eccellente pur mancando delle abilità necessarie a prevenire incidenti. All'estremo opposto si colloca la **sindrome dell'impostore**: individui altamente competenti vivono con l'ansia di non essere all'altezza.

Gli studi di Dunning e Kruger hanno messo in luce come l'autovalutazione possa essere fallace: chi possiede poche competenze tende a sopravvalutarsi, mentre chi è davvero esperto sottostima le proprie abilità. Capire questo meccanismo aiuta a interpretare meglio i comportamenti quotidiani e le difficoltà nel valutare in modo realistico le proprie capacità.

7.5 LA MENTE COME MEDICINA

È il 1784 e in Europa si discute animatamente delle pratiche non convenzionali di Franz Mesmer, un medico che sostiene di poter curare molte malattie riequilibrando il cosiddetto "magnetismo animale", un fluido invisibile che permeerebbe tutto l'universo. Mesmer ricorre a magneti, recipienti colmi d'acqua e ferraglia, accompagnando le sedute con movimenti lenti e solenni delle mani. I suoi pazienti spesso reagiscono con crisi spettacolari (convulsioni, pianti, svenimenti) che il medico interpreta come segni del processo di guarigione.

Quando le tensioni con la comunità scientifica austriaca lo spingono a lasciare Vienna per Parigi, Luigi XVI incarica una commissione di indagare sulle sue teorie. A guidarla è Benjamin Franklin, ambasciatore degli Stati Uniti in Francia, affiancato da un gruppo di studiosi fra cui spicca Antoine Lavoisier.

È proprio Lavoisier a ideare un esperimento "in cieco": alcuni pazienti credono di ricevere il trattamento magnetico, ma metà di loro non ricevono nulla. Eppure, molti riferiscono un miglioramento. Nasce così il concetto di **effetto placebo** ("piacerò", in latino).

Un **placebo** è una sostanza priva di effetti terapeutici specifici (come dell'acqua o dello zucchero) che tuttavia produce un beneficio percepito. L'**effetto placebo** è quindi il miglioramento dello stato di salute dopo la somministrazione di una sostanza inefficace: un apparente paradosso.

Come si spiega? La mente può influenzare il corpo in modi sorprendenti. Oggi la ricerca ha identificato i meccanismi cerebrali che lo rendono possibile: l'assunzione di un placebo può stimolare la produzione di endorfine e altri neurotrasmettitori, riducendo il dolore e migliorando il benessere psicofisico. L'effetto non dipende dalla sostanza, ma dalla risposta psicologica e neurobiologica del paziente, attivata da aspettative, significato del trattamento e relazione con i medici. È per questa ragione che molti fruitori di medicine non convenzionali o di cure omeopatiche stanno meglio: l'effetto placebo è tanto più potente quanto più si è convinti che un rimedio funzionerà.

Ma quindi il placebo cura davvero? Non proprio. Il placebo **non guarisce** la malattia, ma **allevia** sintomi come il dolore o l'ansia. I suoi effetti vanno però valutati con cautela: non può trattare tumori o patologie genetiche, ma può migliorare la qualità di vita in disturbi come l'insonnia o il dolore cronico. Il beneficio deriva dal contesto e dalle aspettative che accompagnano il trattamento.

In definitiva, il paradosso del placebo non è un'incoerenza logica, ma una prova del potere delle aspettative e del contesto nel processo di guarigione. Rivela quanto gli aspetti psicologici e sociali siano parte integrante dell'esperienza della cura.

MAPPA DI SINTESI

PSICOLOGIA

IL PARADOSSO DELL'IPERCONNESSIONE



siamo costantemente connessi
tramite la tecnologia,
ma spesso ci sentiamo soli



la quantità di connessioni
non garantisce
qualità delle relazioni

MAPPA DI SINTESI

PSICOLOGIA

IL PARADOSSO DELL'INFORMAZIONE



troppi dati
possono rendere difficile
capire o prendere decisioni,
quasi come non avere dati



l'eccesso di informazioni
causa sovraccarico cognitivo,
impedendo di estrarre
quello che è davvero utile

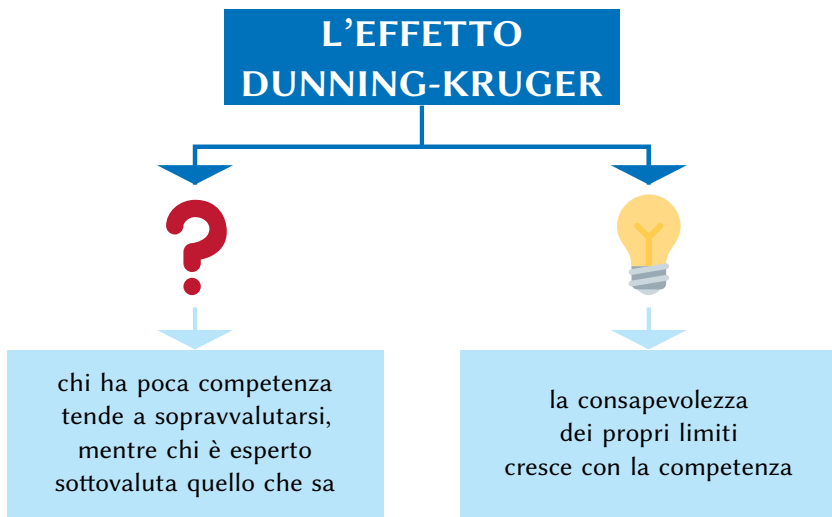
MAPPA DI SINTESI

PSICOLOGIA



MAPPA DI SINTESI

PSICOLOGIA



MAPPA DI SINTESI

PSICOLOGIA



8

PERCEZIONE

Più guardi, meno vedi.

proverbio zen

I nostri sensi non ci mostrano il mondo com'è, ma come lo interpretiamo. Ci fanno vedere, sentire, toccare cose che esistono davvero, ma anche cose che non esistono affatto. A volte ci ingannano sottile e delicatamente, altre volte ci spingono verso il paradosso più evidente: ciò che percepiamo può contraddire la realtà.

In questo capitolo esploreremo tre forme di inganno percettivo: aree che scompaiono davanti ai nostri occhi, oggetti che non possono esistere se non come disegni, e la sorprendente sensazione di caldo e freddo che cambia a seconda di ciò che abbiamo appena provato.

8.1 L'AREA SCOMPARSA

«Di colpo l'immagine, a grandezza naturale, si anima e diventa vivente. È la porta di una fabbrica che si apre e lascia uscire un flusso di operai e operaie, con delle biciclette, dei cani che corrono, delle macchine: tutto si agita, si muove. È la vita stessa, è il movimento preso dal vivo». Il 30 dicembre del 1895, sul quotidiano francese *La Poste*, un articolo celebrava così la prima proiezione cinematografica della storia.

Due giorni prima, al *Salon indien du Grand Café* di Parigi, l'invenzione dei fratelli Auguste e Louis Lumière incontrava i suoi primi spettatori. Era un sabato freddo e pochi curiosi avevano assistito a dieci cortometraggi. Uno striscione sul marciapiede del *boulevard des Capucines* recitava: «Cinematografo Lumière. Ingresso: un franco». Era nato il cinema, la “settima arte”.

Il cinema può definirsi come un'illusione ottica determinata dalla rapida successione di immagini. L'occhio umano trattiene sulla retina un'immagine per una frazione di secondo, anche dopo che è sparita

Uno dei primi film dei fratelli Lumière, proiettato nel 1896, mostrava l'arrivo di un treno alla stazione di La Ciotat, in Costa Azzurra. Si racconta che molti spettatori scapparono dalla sala, convinti che il treno stesse arrivando davvero.

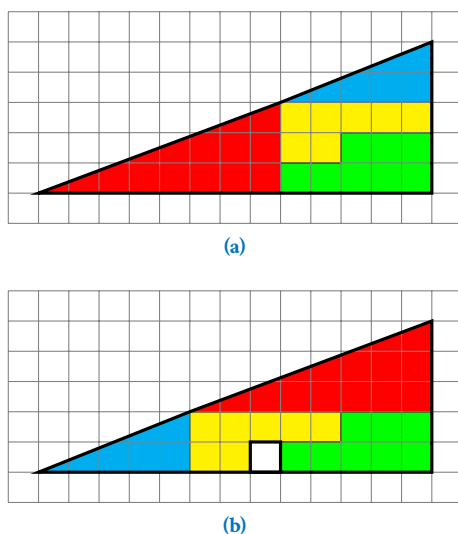


Figura 32: Da dove viene il quadratino bianco?

dal campo visivo. In quella stessa frazione di secondo, un'immagine può essere sostituita da un'altra lievemente diversa, dando al cervello l'illusione del movimento. Quello che vediamo sullo schermo cinematografico, dunque, non è altro che una serie di immagini statiche, di solito 24 fotogrammi al secondo, in modo tale da ingannare il nostro occhio.

Il nostro cervello ci può trarre in inganno in molti modi, rendendoci vittime di veri e propri **paradossi sensoriali**. Limitiamoci alla vista, il senso più soggetti agli abbagli. Un'**illusione ottica** è un fenomeno che inganna i nostri occhi, facendoci vedere qualcosa che non c'è.

I paradossi della percezione sono momenti di difficoltà dei sensi, smascherati dalla ragione. Osserviamo i triangoli *A* e *B* rappresentati nella **figura 32**. I triangoli hanno la stessa base e la stessa altezza, e i pezzi di cui sono composti sono gli stessi. Da dove viene il quadratino bianco?

Dove non ci aiuta l'occhio può aiutarci la matematica. Consideriamo il triangolo rosso e il triangolo blu: il rapporto fra le lunghezze dei cateti è diverso nei due triangoli: è $8 : 3$ nel triangolo rosso e $5 : 2$ nel triangolo blu. Quindi la pendenza delle ipotenuse non è la stessa: nella figura *A*, nel punto di incontro, si piegano leggermente verso l'interno, mentre nella figura *B* si piegano leggermente verso l'esterno. In altre parole le figure *A* e *B* non sono triangoli ma quadrilateri

(concavo A , convesso B), e l'area di B è maggiore di quella di A : la differenza tra le aree è pari all'area del quadratino bianco.

A prima vista non ci accorgiamo dell'errore perché siamo portati istintivamente a cercare una regolarità nelle figure, e vediamo un triangolo anche dove non c'è. Il paradosso è stato inventato nel 1953 dall'illusionista Paul Curry.

Tra gli artisti che hanno realizzato opere basate sulle illusioni ottiche ci sono Maurits Escher, Salvador Dalí e Giuseppe Arcimboldo. Esiste addirittura un genere pittorico, il *trompe-l'oeil* ("inganna l'occhio", in francese), in cui si realizzano immagini realistiche su una superficie bidimensionale che sembrano tridimensionali.

8.2 OGGETTI IMPOSSIBILI

Ci sono forme che il cervello riconosce come plausibili, ma che la realtà fisica non può contenere. Figure che sembrano coerenti, finché restano sulla carta: oggetti impossibili che mettono in crisi la nostra percezione dello spazio. Il triangolo di Penrose, la scala infinita, il cubo impossibile: sono illusioni ottiche che sfruttano le regole della prospettiva per costruire paradossi visivi.

Uno dei più noti oggetti impossibili è il **triangolo di Penrose**, ideato dal matematico Roger Penrose nel 1958 e definito da lui stesso come «l'impossibile nella sua forma pura» (figura 33). L'illusione nasce da tre prismi a base quadrata disposti in modo da sembrare uniti con angoli retti. La figura appare come un triangolo perfettamente chiuso, ma con tre angoli di 90 gradi ciascuno: un'impossibilità geometrica nella realtà tridimensionale, dove la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a 180 gradi.

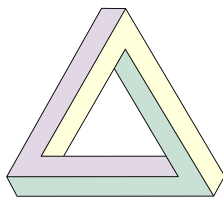


Figura 33: Il triangolo di Penrose.

La forma del triangolo di Penrose ha ispirato numerose rappresentazioni artistiche, come la litografia *Cascata* di Maurits Escher (figura 35a), in cui si osserva un flusso d'acqua che percorre un circuito chiuso, salendo e scendendo in modo apparentemente coerente. L'acqua aziona un mulino, poi ricomincia il suo percorso, generando l'illusione di un **moto perpetuo**. L'occhio accetta il movimento, ma la fisica lo rifiuta: un ciclo infinito senza energia esterna è impossibile.

Un altro oggetto paradossale è il **cubo impossibile**, progettato da Roger e Lionel Penrose nel 1954 (**figura 34**). La struttura appare come un solido tridimensionale coerente, ma contiene connessioni spaziali che non possono esistere: alcune barre sembrano avvicinarsi e allontanarsi in modo contraddittorio. L'effetto si basa su prospettive ingannevoli e linee che suggeriscono profondità diverse in conflitto tra loro.

Il cubo impossibile serve da base per costruzioni ancora più elaborate, come quella rappresentata nell'opera *Belvedere* di Escher (**figura 35b**). La scena mostra un edificio con colonne, scale e archi disposti in una logica spaziale incoerente. L'illusione coinvolge piani che dovrebbero essere paralleli ma non lo sono, passaggi che si contraddicono, e un personaggio che osserva proprio un cubo impossibile, suggerendo una riflessione sulla percezione della realtà.

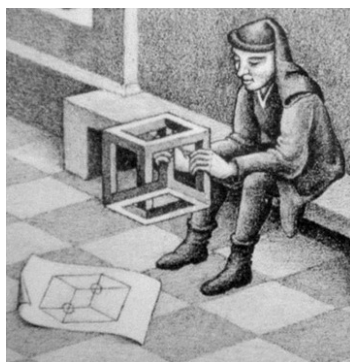


Figura 34: Particolare di *Belvedere*.

Tra le figure più celebri dei paradossi percettivi spicca la **scala di Penrose**, una costruzione che sembra salire o scendere indefinitamente, chiudendosi su sé stessa (**figura 36**). Ogni rampa appare perfettamente coerente, ma l'intero circuito sfida le leggi della geometria. La rappresentazione suggerisce un movimento continuo che, nella realtà tridimensionale, risulterebbe assurdo. L'opera *Salita e discesa* di Escher (**figura 35c**) è basata sulla scala di Penrose.

Molti oggetti impossibili si basano sull'uso sapiente della prospettiva. Alcune rappresentazioni mostrano ambienti in cui le leggi della gravità e dell'orientamento sembrano alterate. In un edificio paradossale, per esempio, ogni lato può diventare pavimento, soffitto o parete, a seconda del punto di vista.

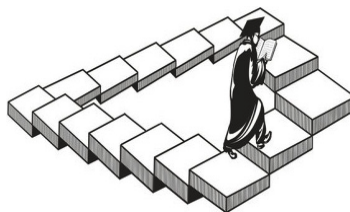
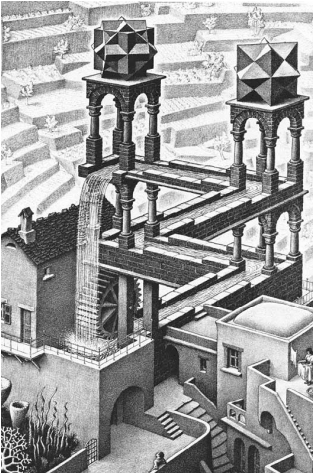
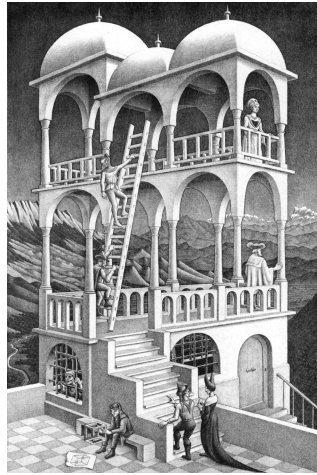


Figura 36: La scala di Penrose.

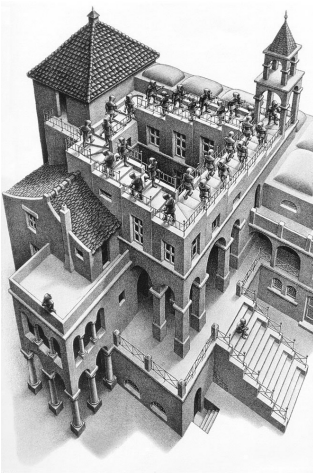
Un esempio particolarmente suggestivo è l'opera *Altro mondo II* di Escher (**figura 35d**), che rappresenta una stanza in cui finestre, scale



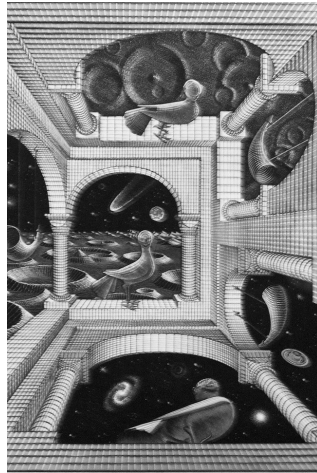
(a) Cascata.



(b) Belvedere.



(c) Salita e discesa.



(d) Altro mondo II.

Figura 35: Mondi impossibili.

e aperture si moltiplicano in direzioni incoerenti, ognuna legata a un proprio sistema di riferimento.

Anche strutture più complesse possono essere costruite su questi principi, come nel caso di ambienti costituiti da scale che si intersecano in ogni direzione. L'osservatore si trova immerso in uno spazio dove l'alto e il basso perdono significato, e dove più sistemi gravitazionali sembrano coesistere nello stesso luogo. L'effetto finale è una destabilizzazione della percezione, un invito a rimettere in discussione ciò che si dà per scontato nel mondo visibile.

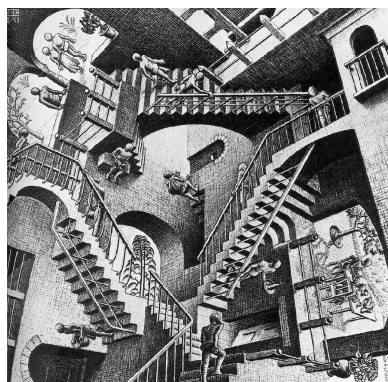


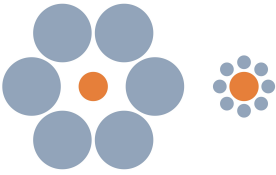
Figura 37: *Relatività.*

La cultura popolare ha spesso usato i paradossi per rappresentare ambienti magici o alterati. Nell'universo narrativo di *Harry Potter*, per esempio, le scale della scuola di Hogwarts cambiano direzione e collegamenti in modo imprevedibile, evocando la logica fluida e instabile degli oggetti impossibili. L'illusione è funzionale al racconto, ma affonda le sue radici in meccanismi psicologici profondi: il nostro cervello cerca coerenza, anche quando non c'è.

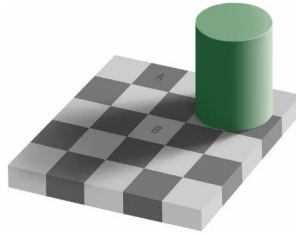
8.3 ILLUSIONI OTTICHE

Le illusioni ottiche mostrano come la percezione visiva possa ingannare la mente, trasformando ciò che è oggettivamente semplice in qualcosa di enigmatico. Non vediamo mai il mondo così com'è, ma come il cervello decide di rappresentarlo: un continuo compromesso tra ciò che i sensi raccolgono e ciò che l'esperienza suggerisce.

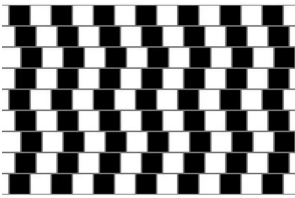
Alcuni esempi rivelano come il contesto alteri radicalmente ciò che vediamo (**figura 38**). Nei **cerchi di Ebbinghaus**, due cerchi centrali perfettamente identici appaiono di dimensioni diverse a seconda delle dimensioni dei cerchi che li circondano. La mente non percepisce la grandezza in modo assoluto, ma in relazione a ciò che la circonda. Lo stesso vale per la **scacchiera di Adelson**, dove due caselle che hanno esattamente la stessa tonalità di grigio appaiono



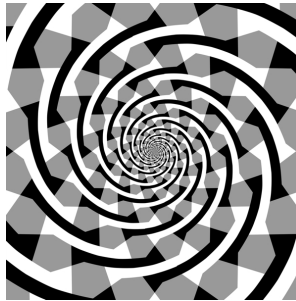
(a) Cerchi di Ebbinghaus.



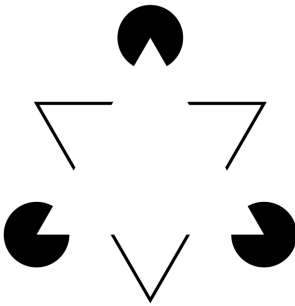
(b) Scacchiera di Adelson.



(c) Muro del caffè.



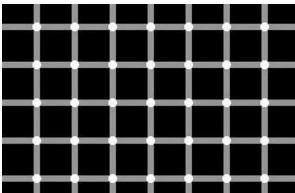
(d) Spirale di Fraser.



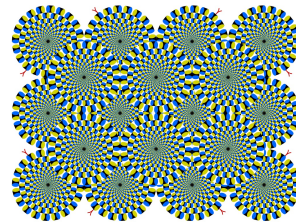
(e) Triangolo di Kanitsa.



(f) Moglie e suocera.



(g) Scintilla della griglia.



(h) Serpenti rotanti.

Figura 38: Alcuni paradossi della percezione.

completamente diverse: il cervello interpreta il colore alla luce delle ombre e della logica della scena, e finisce per distorcere la realtà.

Anche la geometria viene frequentemente deformata dalla percezione. Nel **muro del caffè** (così chiamato perché l'illusione fu osservata per la prima volta su una parete di un caffè a Bristol), delle semplici righe orizzontali sembrano inclinate a causa della disposizione sfalsata dei "mattoni" che le compongono: un'illusione che mostra quanto facilmente l'allineamento possa essere frainteso. La **spirale di Fraser** spinge questo inganno ancora oltre: una serie di archi concentrici, perfettamente chiusi su sé stessi, appaiono come una spirale continua. A ingannarci è la combinazione fra la struttura interna e il nostro modo di interpretarla.

In altri casi, l'illusione nasce da ciò che il cervello aggiunge. Il **triangolo di Kanizsa**, per esempio, non esiste fisicamente: non ci sono linee né forme chiuse, eppure vediamo chiaramente un triangolo bianco sovrapposto ad altre figure. Il cervello completa le informazioni mancanti e costruisce una forma coerente, anche quando non c'è. Lo stesso meccanismo, ma con un effetto diverso, si ritrova nell'immagine nota come **Moglie e suocera**: un disegno ambiguo in cui coesistono due volti opposti, quello di una giovane donna e quello di una figura anziana. Non è l'immagine a cambiare, ma la nostra interpretazione: il cervello oscilla tra due letture possibili, mai contemporaneamente visibili, in un continuo gioco di attenzione e significato.

Alcune illusioni sembrano animate, pur essendo perfettamente statiche. Nella **scintilla della griglia**, osservando una griglia nera su sfondo bianco con punti chiari alle intersezioni, si percepiscono improvvisi bagliori o scintille nere che compaiono e scompaiono, specialmente nella visione periferica. È un movimento apparente, generato da come i recettori visivi gestiscono il contrasto tra luce e ombra. L'effetto diventa ancora più sorprendente nei **serpenti rotanti**, in cui una serie di cerchi colorati, composti da segmenti disposti in modo specifico, sembrano ruotare lentamente sotto i nostri occhi. L'immagine è ferma, ma il nostro sistema visivo, sollecitato da colore, direzione e contrasto, produce un'illusione di movimento continuo e ipnotico.

Le illusioni ottiche non sono semplici curiosità visive. Sono finestre aperte sul funzionamento della mente, che non registra la realtà ma la costruisce, traducendo linee, ombre e contrasti in una rappresentazione coerente del mondo.

Le illusioni mettono in evidenza questo processo: mostrano che la percezione non è un rispecchiamento passivo della realtà, ma il risultato di un'elaborazione continua. In quell'atto creativo e fallibile, la percezione rivela la sua natura più profonda: non un riflesso, ma un'ipotesi continua sulla realtà.

8.4 L'ESPERIMENTO DELLE BACINELLE

Ci fidiamo dei nostri sensi come di vecchi amici. Ci dicono se qualcosa è caldo o freddo, dolce o amaro, vicino o lontano. Eppure, basta un piccolo esperimento domestico per scoprire quanto poco siano affidabili.

Prendi tre bacinelle: una con acqua calda, una con acqua fredda e una al centro con acqua tiepida. Immergi la mano destra nell'acqua calda e la sinistra in quella fredda, per mezzo minuto. Poi spostale entrambe nella bacinella centrale. A quel punto, la mano che era stata nell'acqua calda sentirà l'acqua tiepida come fredda, mentre quella che era stata nell'acqua fredda la sentirà calda.

La realtà fisica è la stessa (l'acqua centrale ha una temperatura oggettiva e uniforme) ma la sensazione è opposta. Il paradosso nasce da qui: com'è possibile che la stessa acqua sia contemporaneamente calda e fredda?

La risposta è che non lo è. È la percezione a cambiare. Il cervello misura le differenze, non i valori assoluti. Dopo un po', i recettori termici si "adattano": smettono di segnalare uno stimolo costante e reagiscono solo quando c'è una variazione. Così, passando da caldo a tiepido, la variazione è verso il freddo; passando da freddo a tiepido, è verso il caldo.

Il paradosso mostra la relatività della sensazione e la distanza fra mondo soggettivo e mondo oggettivo. La stessa cosa vale per molti altri sensi: la luce dopo il buio, il silenzio dopo il rumore, l'odore dopo l'assuefazione. I sensi non mostrano il mondo: lo inventano, ogni volta da capo.

MAPPA DI SINTESI

PERCEZIONE

PARADOSSO DELL'AREA SCOMPARSA



ricomponendo un triangolo,
senza aggiunte o tagli,
sembra che l'area
cambi magicamente



la figura
non è un vero triangolo:
piccole differenze
causano l'illusione

MAPPA DI SINTESI

PERCEZIONE

OGGETTI IMPOSSIBILI



alcune figure sembrano reali,
ma non possono esistere
nella realtà



la vista può ingannare:
per capire davvero,
bisogna ragionare

MAPPA DI SINTESI

PERCEZIONE

ILLUSIONI OTTICHE



vediamo forme, colori
o movimenti
che non corrispondono
alla realtà fisica



la vista può ingannare:
per capire davvero,
bisogna ragionare

MAPPA DI SINTESI

PERCEZIONE

PARADOSSO DELLE TRE BACINELLE



la stessa acqua
sembra calda, fredda o tiepida
a seconda
della bacinella precedente



i sensi
non sono sempre affidabili:
servono misure oggettive

9

RELIGIONE

La fede è credere a ciò che sappiamo non essere vero.

Mark TwainX

La religione non è solo una questione di fede: è anche un terreno su cui, da secoli, la ragione mette alla prova se stessa. Accanto ai tentativi di dimostrare l'esistenza di Dio, la storia del pensiero ha visto sorgere anche argomenti di segno opposto, volti a evidenziare le difficoltà logiche delle sue attribuzioni tradizionali, come l'onnipotenza, la bontà assoluta o il libero arbitrio umano. Questi paradossi non appartengono alla teologia in senso stretto, ma alla logica applicata alle idee religiose, e mostrano come, , anche nel campo del pensiero religioso, la ragione possa rivelare contraddizioni e limiti interni ai sistemi di pensiero.

9.1 L'ONNIPOTENZA

«Credo in un solo Dio, Padre onnipotente, creatore del cielo e della terra, di tutte le cose visibili e invisibili.» Comincia così il Credo cristiano, la professione di fede che milioni di persone nel mondo recitano da secoli. È una formula solenne, familiare, rassicurante: afferma che Dio può tutto, che nulla gli è impossibile. Eppure, dietro questa parola, *onnipotente*, si nasconde un enigma antico e spinoso, che per secoli ha messo in difficoltà filosofi e teologi. Se Dio può tutto, può anche creare una pietra tanto pesante da non riuscire a sollevarla? Se è onnipotente deve poterla creare, ma deve anche poterla spostare, il che però negherebbe la sua onnipotenza nel crearla. Ecco il cuore del **paradosso dell'onnipotenza**.

Il paradosso, di epoca medievale (fu affrontato, tra gli altri, da Pier Damiani, Pietro Abelardo e Tommaso d'Aquino) può essere risolto ammettendo che l'onnipotenza non esiste. La cosa però era inaccettabile per molti filosofi medievali, ferventi credenti.

«Il buon cristiano dovrebbe guardarsi dai matematici: c'è il pericolo che abbiano stretto un patto col diavolo per annebbiare lo spirito e mandare l'uomo all'inferno.»
— Agostino d'Ippona

Pier Damiani provò a risolvere il paradosso affermando che, se Dio dovesse obbedire alla logica, non sarebbe più onnipotente. Tommaso d'Aquino sostenne invece che Dio, essere onnipotente, può fare tutto ciò che è possibile, ma neppure lui può compiere l'impossibile, che altrimenti smetterebbe di esserlo. Nel Rinascimento Nicola Cusano affermò che il paradosso nasce dall'applicazione di categorie finite a un concetto infinito, per cui lo spostarsi e il non spostarsi di un oggetto sono assolutamente identici. Tutte queste soluzioni implicano un'accettazione delle contraddizioni e quindi, sostanzialmente, una rinuncia alla logica.

Il paradosso dell'onnipotenza mostra come, dietro una parola apparentemente innocua, si nascondano trappole del linguaggio da cui non si può uscire senza contraddirsi. L'unica vera soluzione è riconoscere che il concetto stesso di onnipotenza è, in fondo, logicamente incoerente.

9.2 IL LIBERO ARBITRIO

Washington, 2054. Sei anni senza omicidi: un record reso possibile dalla Precrimine, una polizia speciale che ferma i criminali prima che commettano il delitto, grazie ai poteri dei Precog, tre individui in grado di vedere il futuro. Ma se il futuro è già scritto, che senso ha parlare di libertà? E si può davvero punire chi non ha ancora agito? Queste domande filosofiche sono al centro di *Minority Report* (2002) di Steven Spielberg, tratto dal racconto di Philip Dick, un film che esplora il confine tra determinismo e libero arbitrio, mostrando quanto il futuro resti sempre in bilico finché l'uomo può scegliere diversamente.

Il tema affrontato da Spielberg richiama un antico dibattito filosofico: il **paradosso del libero arbitrio**. Questo paradosso nasce dal confronto tra due idee apparentemente incompatibili. Da un lato, l'onniscienza di Dio: se Dio conosce già ogni evento futuro, allora sa in anticipo ogni scelta e azione umana. Dall'altro, il libero arbitrio: l'uomo dovrebbe poter decidere autonomamente, senza essere predeterminato. Proprio come nella Precrimine, dove i Precog "vedono" il futuro, la conoscenza totale degli eventi sembra mettere in discussione la libertà di agire. Se tutto è già scritto, come può esistere una vera libertà?

Una soluzione è ammettere che il rapporto tra onniscienza e libertà umana resta un mistero, un enigma che sfugge alla logica. Tuttavia,

questa soluzione implica in parte una rinuncia a una comprensione razionale del problema. Una soluzione più semplice consiste nel rinunciare all'idea stessa di onniscienza divina. Se nessuno conosce già il futuro, allora le scelte umane non sono predeterminate e la libertà torna a essere pienamente reale. Il futuro resta aperto, incerto e plasmato dalle decisioni di chi lo vive, e il paradosso del libero arbitrio si dissolve.

9.3 IL PROBLEMA DEL MALE

Siamo in Polonia, nel campo di concentramento di Auschwitz.

I nazisti hanno appena terminato una "selezione": una parte dei prigionieri verrà mandata alle camere a gas, gli altri torneranno alle baracche, vivi per un altro giorno. Tra i sopravvissuti c'è un

vecchio ebreo, Kuhn, che si inginocchia e ringrazia Dio per essere stato risparmiato. Primo Levi, che assiste alla scena, scrive: «Se fossi Dio, sputerei a terra la preghiera di Kuhn». In quelle parole c'è tutto il problema del male: come può un Dio giusto permettere un'ingiustizia tanto grande?

		Dio	
		vuole	non vuole
può	può	vuole e può	può ma non vuole
	non può	vuole ma non può	non può e non vuole

Figura 39: Il paradosso di Epicuro: se Dio vuole e può eliminare il male nel mondo, perché non lo elimina?

Già Epicuro, più di duemila anni prima, aveva posto la domanda con rigore logico: se Dio vuole eliminare il male ma non può, non è onnipotente; se può ma non vuole, non è buono; se né vuole né può, non è Dio. L'argomento di Epicuro parte dal dato di fatto che nel mondo c'è il male. Ci sono allora quattro possibilità (figura 39). O Dio vuole eliminare il male ma non può, o può ma non vuole, o non vuole e non può, o vuole e può. Se vuole ma non può, Dio non è onnipotente. Se può ma non vuole, non è infinitamente buono. Se non vuole e non può, non è né infinitamente buono né onnipotente. Se vuole e può, da dove viene il male? Perché Dio non lo elimina? Dato che il male esiste, Dio o non è onnipotente o non è infinitamente buono.

Una possibile soluzione del paradosso sta nel sostenere che l'onnipotenza di Dio non vada intesa in senso assoluto, cioè come «fare tutto quello che si vuole»: Dio potrebbe scegliere autonomamente di limitarsi, come si dice che faccia con il libero arbitrio, quando decide di non interferire con le decisioni degli uomini pur potendolo fare. La soluzione ricorda la Prima Direttiva di Star Trek, che vieta di interferire nello sviluppo di una civiltà di un pianeta finché non abbia sviluppato la tecnologia dei viaggi interstellari.

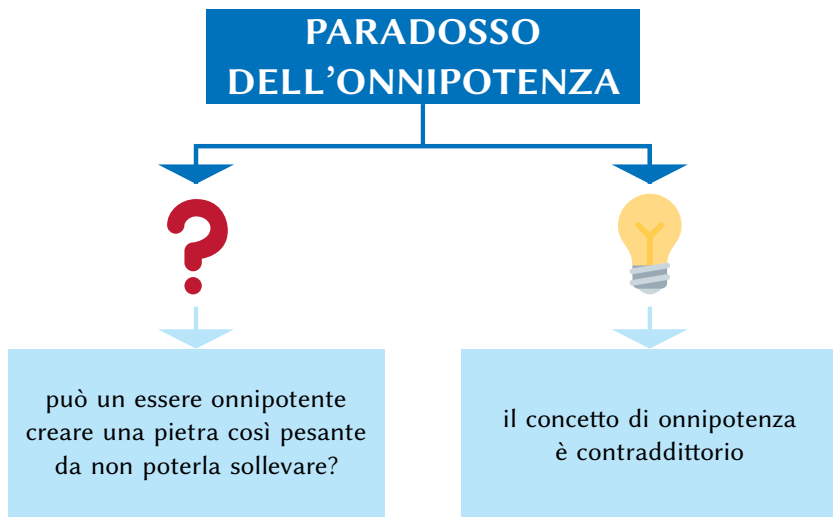
Un'altra soluzione è negare del tutto l'onnipotenza di Dio. Lo sostiene Hans Jonas, che di fronte all'olocausto degli Ebrei ha detto: «Ad **Auschwitz** Dio restò muto non perché non voleva ma perché non poteva, perché l'attributo dell'onnipotenza di Dio va escluso se vogliamo conservarne la bontà». Stefano Benni ha aggiunto ironicamente: «Non so se Dio esiste, ma se non esiste ci fa una figura migliore».

Infine, per risolvere il paradosso possiamo ammettere che Dio è incomprendibile e che noi uomini dobbiamo accettare con rassegnazione il nostro destino terreno e confidare che nell'aldilà Dio provvederà a fare giustizia, punendo gli ingiusti e premiando i giusti.

C'è un'intera parte della teologia, la **teodicea** (parola che in greco significa "giustizia di Dio") che cerca di coniugare la bontà di Dio e la presenza del male nel mondo.

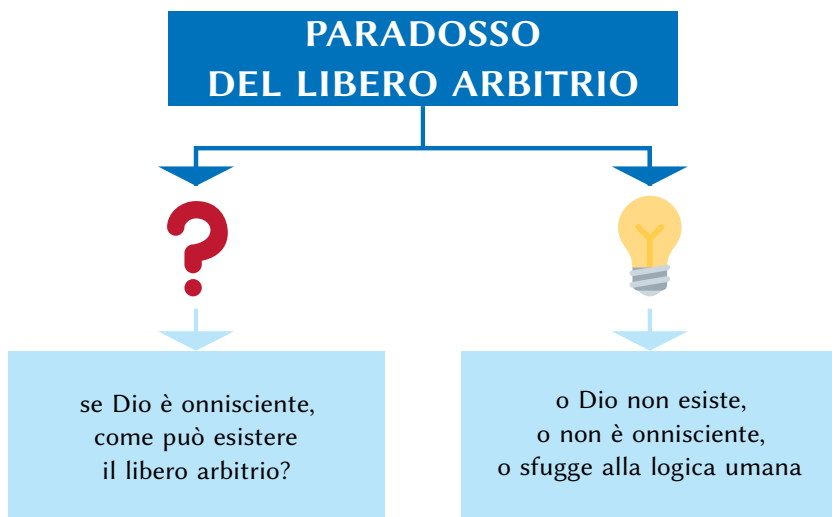
MAPPA DI SINTESI

RELIGIONE



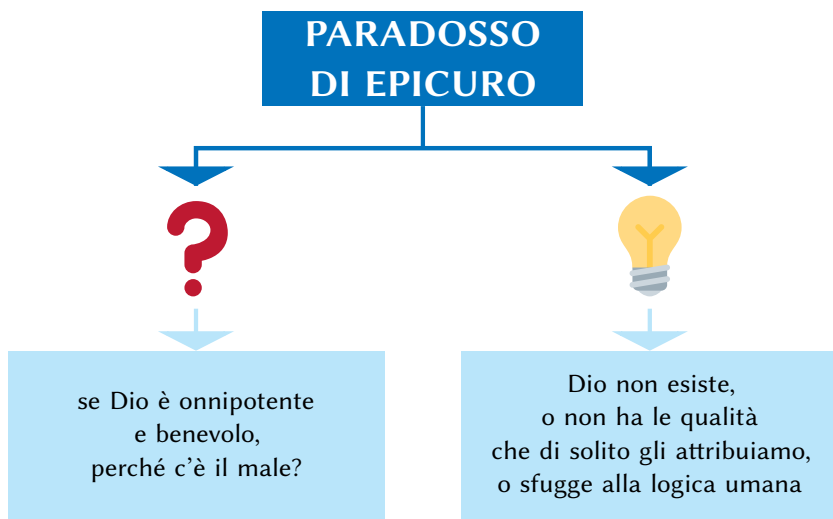
MAPPA DI SINTESI

RELIGIONE



MAPPA DI SINTESI

RELIGIONE





PARADOSSI LAMPO

La citazione è un utile sostituto dell'arguzia.

Oscar Wilde

«Niente è costante tranne il cambiamento.»

Buddha

«La vera conoscenza consiste nel sapere fin dove arriva la propria ignoranza.»

Confucio

«Per guidare gli altri, cammina alle loro spalle.»

Laozi

«Il fallimento è la base del successo. Il successo è il luogo nascosto del fallimento.»

Laozi

«L'unica certezza è che nulla è certo.»

Plinio il vecchio

«Nulla imprime qualcosa nella memoria con più forza rispetto al desiderio di dimenticarla.»

Michel de Montaigne

«Un uomo che teme di soffrire soffre già di quello che teme.»

Michel de Montaigne

«Il paradosso non è che un conflitto tra due verità che si trovano una di fronte all'altra.»

Blaise Pascal

«Mi fa infuriare avere torto quando so che ho ragione.»

Molière

«Le donne non sono mai tanto forti quanto nel momento in cui si armano della loro debolezza.»

Marie du Deffand

«Le censure finiscono sempre per dare credibilità alle idee che cercano di sopprimere.»

Voltaire

«Il superfluo è necessario.»

Voltaire

«Gli uomini saranno sempre pazzi, e coloro che pensano di poterli curare sono i più pazzi di tutti.»

Voltaire

«La storia insegna che dalla storia non impariamo nulla.»

George Hegel

«Siccome ho molta fretta, vado molto piano.»

Napoleone Bonaparte

«In amore vince chi fugge.»

Napoleone

«La malinconia è la gioia di sentirsi tristi.»

Victor Hugo

«Porto addosso tutte le ferite delle battaglie che ho evitato.»

Fernando Pessoa

«Parlare di sé può essere anche un modo per nascondersi.»

Friedrich Nietzsche

«Il peggiore inverno che abbia mai vissuto fu un'estate a San Francisco.»

Mark Twain

«Ho fatto in modo che a scuola non interferisse con la mia istruzione.»

Mark Twain

«Solo il paradosso merita il privilegio di essere vero.»

Oscar Wilde

«Solo i superficiali non giudicano dalle apparenze.»

Oscar Wilde

«Ogni uomo mente, ma dategli una maschera e sarà sincero.»

Oscar Wilde

«Le peggiori cose sono sempre fatte con le migliori intenzioni.»

Oscar Wilde

«I piaceri semplici sono l'ultimo rifugio della gente complicata.»

Oscar Wilde

«A questo mondo ci sono solo due tragedie: una e non ottenere ciò che si vuole, l'altra è ottenerlo.»

Oscar Wilde

«Perché resti tutto com'è, bisogna che tutto cambi.»

Giuseppe Tomasi di Lampedusa

«L'uomo ha bisogno di difficoltà, sono necessarie alla salute.»

Carl Jung

«L'essere umano tende a provare affetto soprattutto per chi sembra desiderarlo di meno.»

Bertrand Russell

«Ogni profonda verità porta in sé il suo contrario.»

Niels Bohr

«Se la fisica quantistica non vi confonde, allora non l'avete capita.»

Niels Bohr

«Le riunioni sono indispensabili se non si vuole fare niente.»

John Galbraith

«Adoro l'umanità. È la gente che non sopporto.»

Charles Schulz

«Nella separazione è quello dei due che non ama a dire le cose più dolci.»

Marcel Proust

«Quando arrivai a casa mi aspettavo una sorpresa. Ma per me non c'era nessuna sorpresa, e ne fui sorpreso.»

Ludwig Wittgenstein

«In amore accade il paradosso per cui due esseri diventano uno solo eppure restano due.»

Erich Fromm

«Nessuno è così povero da non potersi permettere un cane, e ho visto gente così povera da potersene permettere tre.»

Josh Billings

«Perché si deve per forza essere anticonformisti come tutti gli altri?»

James Thurber

«Nel mondo circolano moltissime bugie, e il peggio è che metà di esse contengono una parte di verità.»

Winston Churchill

«Non potrei mai far parte di un club che mi accettasse come socio.»

Groucho Marx

«Non c'è nulla di più deprimente dell'ottimismo.»

Paul Fussell

«Un uomo che commette un'azione disumana si giustifica dicendo "dopotutto sono umano".»

Sydney Harris

«La gente vuole risparmiare, e pagherà qualunque prezzo pur di riuscirci.»

Lee Iacocca

«L'amore gratuito ha un prezzo troppo alto.»

Bernadette Devlin

«È difficile stare zitti se non si ha nulla da dire.»

Malcom Margolin

«L'uomo è condannato a essere libero.»

Jean Paul Sartre

«La matematica è piena di paradossi, eppure non mente mai.»

anonimo

«Un paradosso è la verità che danza il tip-tap.»

anonimo

«Il paradosso è che nulla è più serio di una contraddizione presa sul serio.»

anonimo

«Più cerchi di evitare il paradosso, più ci caschi dentro.»

anonimo

B | CRONOLOGIA

Il futuro influenza il presente tanto quanto il passato.

Friedrich Nietzsche

La **tabella 8** presenta, in ordine cronologico, i principali paradossi trattati nel libro, indicando anno di nascita, nome e autore.

Tabella 8: Cronologia dei paradossi.

Anno	Paradosso	Autore
–490	dell'incommensurabilità	Ippaso di Metaponto
–480	della nave di Teseo	Epicarmo
–460	di Achille e la tartaruga	Zenone di Elea
–460	della freccia	Zenone di Elea
–430	del bugiardo	Eubulide di Mileto
–420	del mucchio	Eubulide di Mileto
–300	di Dio e il male	Epicuro
200	dell'avvocato	Aulo Gellio
1300	delle due circonferenze	Duns Scoto
1638	degli infiniti equivalenti	Galileo Galilei
1100	dell'onnipotenza	Pier Damiani
1738	di San Pietroburgo	Daniel Bernoulli
1776	dell'acqua e dei diamanti	Adam Smith
1784	del placebo	Antoine Lavoisier
1785	dell'ordine delle votazioni	Nicolas de Condorcet
1823	del cielo buio	Heinrich Olbers
1867	del diavoleto	James Maxwell
1874	dei due infiniti	Georg Cantor
1880	dell'Alabama	Charles Seaton
1899	della mappa	Josiah Royce
1901	degli insiemi normali	Bertrand Russell
1908	dell'eterologicità	Kurt Grelling e Leonard Nelson

Continua nella prossima pagina

Continua dalla pagina precedente

Anno	Paradosso	Autore
1911	dei gemelli	Paul Langevin
1913	della scimmia instancabile	Émile Borel
1918	del barbiere	Bertrand Russell
1924	dell'hotel infinito	David Hilbert
1924	della sfera duplicata	Stefan Banach e Alfred Tarski
1929	del mondo piccolo	Frigyes Karinthy
1929	dei due gelatai	Harold Hotelling
1935	dell'intreccio quantistico	Albert Einstein
1935	del gatto vivo e morto	Erwin Schrödinger
1936	del bibliotecario	Bertrand Russell
1939	del compleanno	Richard von Mises
1942	degli aerei scomparsi	Abraham Wald
1945	della tolleranza	Karl Popper
1950	delle tre carte	Warren Weaver
1950	dei due prigionieri	Albert Tucker
1950	del silenzio cosmico	Enrico Fermi
1951	dei dati ingannevoli	Edward Simpson
1951	del voto ingiusto	Kenneth Arrow
1953	dell'area scomparsa	Paul Curry
1959	dei due bambini	Martin Gardner
1963	dell'acqua calda	Erasto Mpemba
1968	del traffico	Dietrich Braess
1970	dei diritti negati	Amartya Sen
1974	della felicità	Richard Easterlin
1990	di Monty Hall	Marilyn vos Savant
1991	dell'amicizia	Scott Feld
1998	del rossetto	Juliet Schor
1999	dell'ignoranza	David Dunning e Justin Kruger

Si conclude dalla pagina precedente

BIBLIOGRAFIA

Clark, Michael

2010 *I paradossi dalla A alla Z*, Raffaello Cortina, Milano.

D'Agostini, Franca

2009 *Paradossi*, Carocci, Roma.

Falletta, Nicholas

2019 *Il libro dei paradossi*, TEA, Milano.

Ghattas, Robert

2007 *Tutti i numeri sono uguali a cinque*, Springer Verlag, Milano.

Odifreddi, Piergiorgio

2004 *Le menzogne di Ulisse: l'avventura della logica da Parmenide ad Amartya Sen*, Longanesi, Milano.

2006 *C'era una volta un paradosso. Storie di illusioni e verità rovesciate*, Einaudi, Torino.

Sainsbury, Robin

2010 *Paradossi*, Il Mulino, Bologna.

Smullyan, Raymond

2024 *Qual è il titolo di questo libro? Indecidibilità, enigmi e paradossi*, Adelphi, Milano.

INDICE ANALITICO

A

Abel, Niels, 54
 Abelardo, Pietro, 171
 Adams, Douglas, 62
 Adams, John, 55
 Adelson, Edward, 162
 Agostino d'Ippona, 171
 Anassimandro di Mileto, 39
 Archimede, 43, 49, 50
 Arcimboldo, Giuseppe, 159
 Aristotele, 36–38, 82
 Arrow, Kenneth, 108, 186
 Aspect, Alain, 91

B

Bach, Johann, 38
 Bacon, Kevin, 134, 135
 Balinski, Michel, 110, 111
 Banach, Stefan, 186
 Barr, Mark, 35
 Bateson, Gregory, 21
 Bell, John, 91
 Benni, Stefano, 174
 Bentham, Jeremy, 123
 Berkeley, George, 45
 Bernoulli, Daniel, 125–127, 185
 Bernoulli, Jakob, 52
 Bernoulli, Johann, 52
 Bickel, Peter, 62
 Billings, Josh, 182
 Bohr, Niels, 89, 181
 Bolzano, Bernard, 38
 Bonaparte, Napoleone, 180
 Borel, Émile, 61, 186
 Borges, Jorge, 8, 31, 36, 38, 46
 Braess, Dietrich, 131, 132, 186
 Bruno, Giordano, 38
 Buchanan, James, 55

Buddha, 179
 Buridano, Giovanni, 18, 19

C

Cantor, Georg, 31, 40–43, 72, 185
 Cargile, James, 22
 Carroll, Lewis, 38
 Carter, Jimmy, 55, 107
 Cauchy, Augustin, 45, 46
 Cavalieri, Bonaventura, 44, 45
 Cervantes, Miguel de, 18
 Cesàro, Ernesto, 53, 54
 Churchill, Winston, 105, 182
 Clinton, Hillary, 107
 Condorcet, Nicolas de, 105–109, 115, 185
 Confucio, 179
 Curry, Paul, 159, 186
 Cusano, Nicola, 43, 44, 172

D

Dalí, Salvador, 159
 Damiani, Pier, 171, 172, 185
 De Mita, Ciriaco, 55
 de Orellana, Francisco, 23
 Dedekind, Richard, 34, 40–42
 Devlin, Bernadette, 182
 Dick, Philip, 172
 Diogene il Cinico, 36
 Drake, Frank, 93
 Drescher, Melvin, 127, 129
 du Defand, Marie, 180
 Dunning, David, 148, 149, 154, 186
 Duns Scoto, 39, 70, 185

E

Easterlin, Richard, 123, 186
 Ebbinghaus, Hermann, 162
 Eco, Umberto, 46, 47
 Einstein, Albert, 81, 87–92, 102, 186
 Eisenhower, Dwight, 55
 El Greco, 25
 Epicarmo, 185
 Epicuro, 173, 177, 185
 Epimenide di Creta, 17, 18
 Eraclito, 9
 Erdős, Paul, 134
 Escher, Maurits, 19, 38, 47, 159
 Eubulide di Mileto, 18, 20, 21, 185
 Euclide, 39
 Eulero, 54

F

Farey, John, 40
 Feld, Scott, 11, 186
 Fermat, Pierre de, 44, 45
 Fermi, Enrico, 93, 104, 186
 Fibonacci, 35
 Flood, Merrill, 127, 129
 Ford, Gerald, 55, 107
 Fraser, James, 164
 Fromm, Erich, 182
 Fussell, Paul, 182

G

Galbraith, John, 181
 Galilei, Galileo, 39, 40, 71, 185
 Gardner, Martin, 23, 186
 Gellio, Aulo, 18, 185
 Gerry, Elbridge, 111
 Gesù di Nazareth, 17
 Giamblico di Calcide, 31
 Giffen, Robert, 124
 Giovanni (evangelista), 17
 Gödel, Kurt, 38
 Grandi, Guido, 53, 54
 Gregorio di San Vincenzo, 37
 Grelling, Kurt, 20, 185
 Guglielmo di Occam, 21
 Gyatso, Tenzin, 121

H

Hall, Monty, 59, 186
 Harding, Warren, 55
 Hardy, Godfrey, 48, 54
 Harris, Sydney, 182
 Hawking, Stephen, 89
 Hegel, George, 180
 Heller, Joseph, 18
 Hilbert, David, 20, 21, 31, 40, 43, 186
 Hill, Micaiah, 48
 Hofstadter, Douglas, 38
 Hope, Bob, 121
 Hotelling, Harold, 113, 186
 Hubble, Edwin, 84
 Hugo, Victor, 180

I

Iacocca, Lee, 182
 Ippaso di Metaponto, 34, 185

J

Jefferson, Thomas, 55
 Johnson, Lyndon, 107
 Jonas, Hans, 174
 Jung, Carl, 181

K

Kanizsa, Gaetano, 164
 Karinty, Frigyes, 133, 186
 Keplero, 35
 Kitano, Takeshi, 38
 Koontz, Dean, 60, 61
 Krikalev, Sergey, 145
 Kronecker, Leopold, 42
 Kruger, Justin, 148, 149, 154, 186

L

Landauer, Rolf, 86
 Langevin, Paul, 87, 186
 Laozi, 179
 Lavoisier, Antoine, 185
 Le Corbusier, 35
 Leibniz, Gottfried, 38, 44, 45, 51
 Leonardo da Vinci, 35
 Levi, Primo, 173
 Liu, Cixin, 94
 Luigi XVI, 149
 Łukasiewicz, Jan, 23
 Lumière, Auguste, 157
 Lumière, Louis, 157

M

Mao, Zedong, 34
 Margolin, Malcom, 17, 182
 Marx, Groucho, 182
 Maxwell, James, 81, 85, 86, 98, 185
 McLuhan, Marshall, 134
 Mesmer, Franz, 149
 Milgram, Stanley, 133, 134
 Mises, Richard von, 55, 186
 Molière, 179
 Mondrian, Piet, 35
 Monroe, James, 55
 Montaigne, Michel de, 179
 Mpemba, Erasto, 81, 82, 95, 186

N

Nash, John, 128, 130
 Nelson, Leonard, 185
 Newton, Isaac, 38, 44, 45
 Nicola d'Oresme, 52
 Nietzsche, Friedrich, 180, 185
 Nobel, Alfred, 108, 133
 Nolan, Christopher, 87

O

Ohm, Georg, 35
 Ohm, Martin, 35
 Olbers, Heinrich, 83, 84, 97, 185

P

Pacioli, Luca, 35
 Pareto, Vilfredo, 128
 Parmenide di Elea, 36
 Pascal, Blaise, 125, 179
 Penrose, Lionel, 160
 Penrose, Roger, 159, 160
 Pessoa, Fernando, 180
 Pilato, Ponzio, 17
 Pitagora, 31, 32, 34, 35
 Planck, Max, 88
 Platone, 21, 121
 Plinio il Vecchio, 179
 Podolsky, Boris, 90, 102
 Polk, James, 55
 Pólya, George, 64
 Popper, Karl, 130, 186
 Post, Emil, 23
 Pound, Robert, 88
 Protagora, 18
 Proust, Marcel, 181

R

Ramanujan, Srinivasa, 48, 55
 Reagan, Ronald, 107
 Rebka, Glen, 88
 Riemann, Bernhard, 55
 Robertson, Morgan, 61
 Rosen, Nathan, 90, 102
 Royce, Josiah, 47, 74, 185
 Russell, Bertrand, 19, 20, 43, 181, 185, 186

S

Sartre, Jean Paul, 182
 Schor, Juliet, 186
 Schrödinger, Erwin, 81,
 88, 89, 101,
 186
 Schulz, Charles, 181
 Schwartz, Laurent, 110
 Seaton, Charles, 185
 Segni, Antonio, 55
 Sen, Amartya, 105, 114,
 119, 123, 186
 Shakespeare, William,
 61, 62
 Shannon, Claude, 86
 Simpson, Edward, 62, 65,
 66, 79, 186
 Smith, Adam, 121, 123, 185
 Spielberg, Steven, 172
 Stiglitz, Joseph, 123

T

Taleb, Nassim, 25

Tarski, Alfred, 20, 21, 186
 Thurber, James, 182
 Tomasi di Lampedusa,
 Giuseppe,
 181
 Tommaso d'Aquino, 171,
 172
 Torricelli, Evangelista,
 52, 53
 Trudeau, Richard, 7
 Truman, Harry, 55
 Tucker, Albert, 127, 129,
 186
 Turing, Alan, 43
 Tversky, Amos, 58
 Twain, Mark, 171, 180

V

Valerio, Chiara, 105, 106
 Voltaire, 180
 von Böhm-Bawerk,
 Eugen, 122

vos Savant, Marilyn, 58,
 59, 186

W

Wald, Abraham, 25, 186
 Wallis, John, 40, 52
 Watts, Duncan, 134
 Weaver, Warren, 60, 186
 Weierstrass, Karl, 46
 Weyl, Hermann, 25
 Wilde, Oscar, 3, 179–181
 Wittgenstein, Ludwig,
 181

Y

Young, Peyton, 110, 111

Z

Zadeh, Lotfi, 22, 23
 Zemeckis, Robert, 92
 Zenone di Elea, 31,
 36–40, 185