



# MATEMATICA

per le terze

degli Istituti professionali

LORENZO PANTIERI

Questo lavoro spiega  
il programma di matematica degli  
Istituti professionali italiani. Ringrazio i  
miei studenti per l'aiuto fornito: il libro  
è più loro che mio. Se avete idee su argo-  
menti da aggiungere o modificare, o se vi  
dovesse capitare di notare un errore, di  
battitura o di sostanza, mi fareste un  
favore comunicandomelo. Spero  
che possiate studiare la ma-  
tematica con il mio  
stesso piacere.



Lorenzo Pantieri

*Matematica per gli Istituti professionali*

Copyright © 2015-2019

✉ [lorenzo.pantieri@gmail.com](mailto:lorenzo.pantieri@gmail.com)

# INDICE

1	FUNZIONI	1
1.1	Relazioni e funzioni	1
1.2	Definizione di funzione	3
1.3	Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche	6
1.4	Rappresentazione cartesiana	9
1.5	Esercizi	11
2	RETTE NEL PIANO CARTESIANO	13
2.1	Funzioni lineari	13
2.2	Appartenenza di un punto a una retta	14
2.3	Punti d'intersezione con gli assi	15
2.4	Coefficiente angolare e ordinata all'origine	16
2.5	Equazione della retta nel piano cartesiano	18
2.6	Posizione reciproca di due rette	23
2.7	Determinare l'equazione di una retta	26
2.8	Esercizi	31
3	EQUAZIONI DI SECONDO GRADO	45
3.1	Richiami sulle radici quadrate	45
3.2	Risoluzione delle equazioni di secondo grado	45
3.3	Equazioni fratte	51
3.4	Scomposizione dei trinomi di secondo grado	57
3.5	Esercizi	60
4	PARABOLA	77
4.1	Appartenenza di un punto a una parabola	78
4.2	Disegno di parabole	79
4.3	Intersezioni tra retta e parabola	87
4.4	Esercizi	90
5	MATEMATICA PER L'ECONOMIA	95
5.1	Problemi di scelta	95
5.2	Problemi di costi e ricavo	98
5.3	Esercizi	108
6	PROVE INVALSI	115
6.1	Algebra	115
6.2	Geometria	126
6.3	Probabilità e statistica	132
6.4	Esercizi	137



# 1 | FUNZIONI

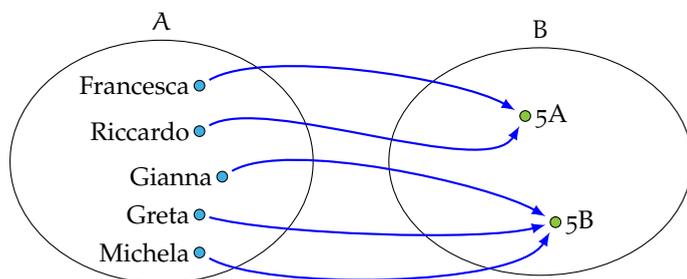
Questo capitolo introduce il concetto di funzione, che è uno dei più importanti di tutta la matematica e che ha numerose applicazioni in tutte le scienze.

## 1.1 RELAZIONI E FUNZIONI

### Primo esempio

Consideriamo l'insieme  $A$  degli alunni di una scuola. Ogni alunno è iscritto a una e una sola classe. Se  $B$  è l'insieme delle classi della scuola, a ogni elemento  $x$  di  $A$  è quindi associato uno e un solo elemento  $y$  di  $B$ . Può capitare che due alunni facciano parte della stessa classe, ma non ci sono alunni iscritti a più classi contemporaneamente o non iscritti ad alcuna classe, né ci sono classi senza alunni.

Il *diagramma a frecce* riportato nella figura seguente, dove per semplicità abbiamo rappresentato un numero limitato di alunni e di classi, mostra la relazione «l'alunno  $x$  è iscritto alla classe  $y$ » con  $x \in A$  e  $y \in B$ .



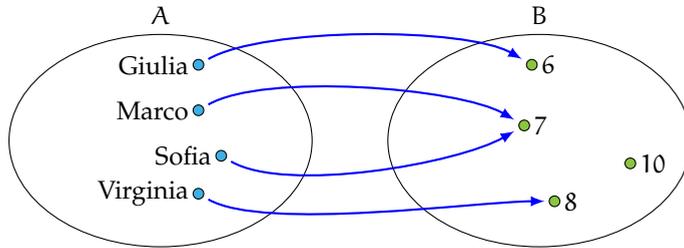
In una relazione di questo tipo, a *ogni* elemento di  $A$ , nessuno escluso, è associato *uno e un solo* elemento di  $B$ . Non è richiesto il viceversa: più elementi di  $A$  possono corrispondere allo stesso elemento di  $B$ .

### Secondo esempio

Consideriamo l'insieme  $A$  degli alunni di una classe che devono svolgere una verifica di matematica. Ogni alunno che affronta la verifica consegue un voto, espresso in numeri interi da 1 a 10. Se  $B$  è l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 10, a ogni elemento  $x$  di  $A$  è quindi associato uno e un solo elemento  $y$  di  $B$ .

Può capitare che due alunni conseguano lo stesso voto (7, per esempio) o che nessun alunno consegua un certo voto (10, per esempio).

Il diagramma a frecce riportato nella figura seguente, dove per semplicità abbiamo rappresentato un numero limitato di alunni e di voti, mostra la relazione «l'alunno  $x$  ha conseguito il voto  $y$ » con  $x \in A$  e  $y \in B$ .

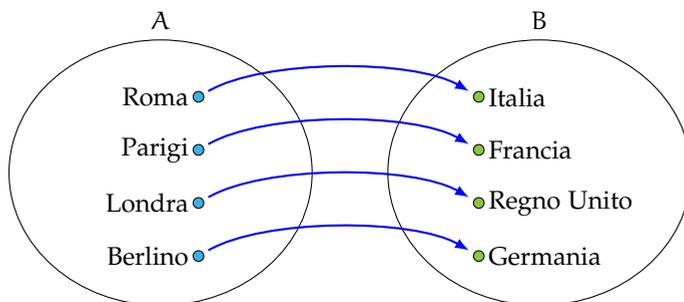


In una relazione di questo tipo, come nell'esempio precedente, a *ogni* elemento di  $A$ , nessuno escluso, è associato *uno e un solo* elemento di  $B$ . Non è richiesto il viceversa: più elementi di  $A$  possono corrispondere allo stesso elemento di  $B$ .

### Terzo esempio

Consideriamo l'insieme  $A$  dei Paesi dell'Unione Europea e l'insieme  $B$  delle capitali dei Paesi dell'Unione Europea.

In questo caso, allora, a *ogni* elemento dell'insieme  $A$  è associato uno e un solo elemento dell'insieme  $B$  e *viceversa*; la figura seguente mostra la relazione «la città  $x$  è capitale del Paese  $y$ ».

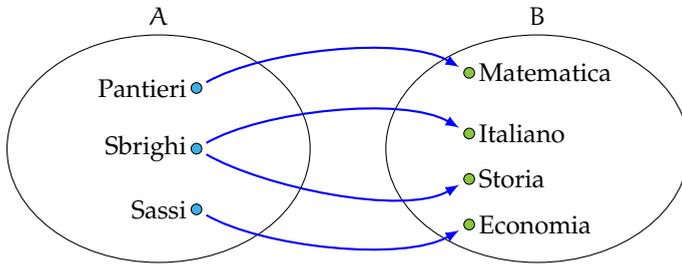


### Quarto esempio

Consideriamo l'insieme  $A$  dei professori di una scuola e l'insieme  $B$  costituito dalle materie che vengono insegnate in quella scuola.

Può capitare che un professore insegni più materie (Italiano e Storia, per esempio).

Il diagramma a frecce riportato nella figura seguente, dove per semplicità abbiamo rappresentato un numero limitato di professori e di materie, mostra la relazione «il prof.  $x$  insegna la materia  $y$ », con  $x \in A$  e  $y \in B$ .

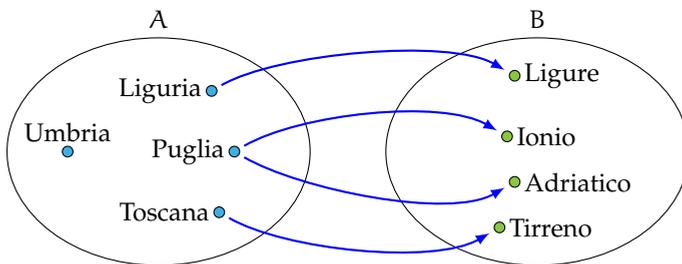


In una relazione di questo tipo, può accadere che a un elemento di A siano associati più elementi di B.

### Quinto esempio

Consideriamo l'insieme A delle Regioni italiane e l'insieme B costituito dai mari italiani. Può capitare che una Regione sia bagnata da più mari (la Puglia, per esempio, è bagnata sia dal Mar Adriatico che dal Mar Ionio), oppure che una Regione non sia bagnata da alcun mare (l'Umbria, per esempio).

La figura seguente, dove per semplicità abbiamo rappresentato un numero limitato di Regioni, mostra la relazione «la Regione  $x$  è bagnata dal Mar  $y$ », con  $x \in A$  e  $y \in B$ .



In una relazione di questo tipo, può accadere che a un elemento di A siano associati più elementi di B, o che a un elemento di A non sia associato alcun elemento di B.

## 1.2 DEFINIZIONE DI FUNZIONE

Le relazioni come quelle dei primi tre esempi del paragrafo precedente sono le più significative in matematica. Per descriverle in modo dettagliato possiamo dire che:

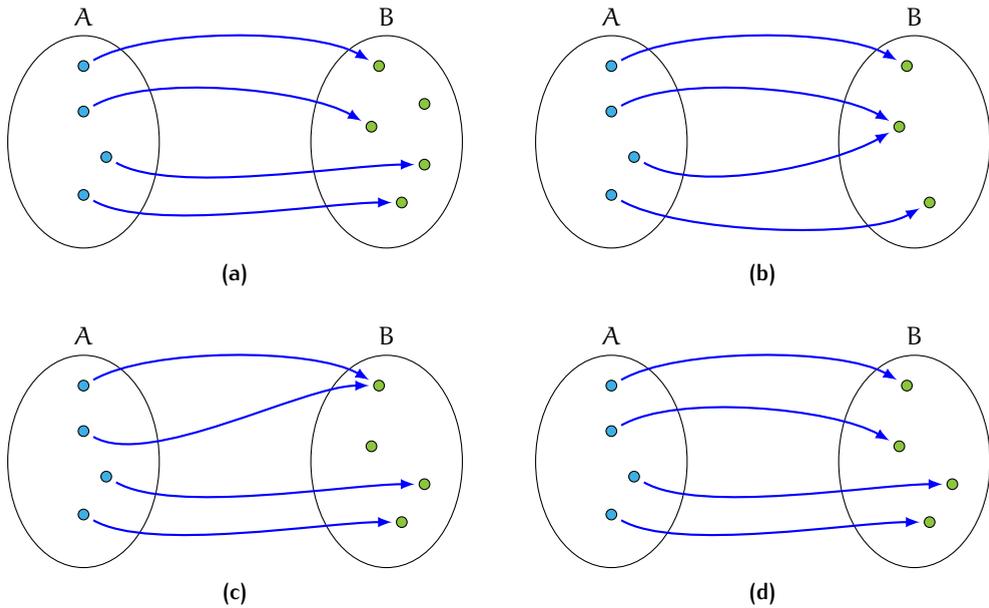


Figura 1: Funzioni

- da ogni elemento di  $A$  esce una sola freccia che va verso un elemento di  $B$ ; in altre parole non ci sono elementi di  $A$  da cui escono più frecce;
- da ogni elemento di  $A$ , nessuno escluso, esce una freccia; in altre parole non ci sono elementi di  $A$  da cui non esca alcuna freccia;
- sugli elementi di  $B$  possono arrivare una o più frecce, e possono anche esserci elementi di  $B$  a cui non arriva alcuna freccia.

**Definizione 1.** Si definisce *funzione*  $f$  di *dominio*  $A$  e *codominio*  $B$  una relazione che associa a ogni elemento di  $A$  uno e un solo elemento di  $B$ . Si scrive  $f: A \rightarrow B$ . Il dominio  $A$  si indica anche con  $\text{dom } f$ .

Una funzione si può esprimere mediante una proposizione che specifica in che modo gli elementi del primo insieme, che vengono di solito indicati con  $x$ , sono legati a quelli del secondo, che vengono di solito indicati con  $y$ .

Se  $A$  e  $B$  sono insiemi numerici, spesso la funzione che associa gli  $x \in A$  agli  $y \in B$  si può esprimere mediante un'espressione di tipo matematico. Per esempio:

- per indicare che l'elemento  $y$  è l'elemento  $x$  aumentato di 1 si scrive  $y = x + 1$
- per indicare che l'elemento  $y$  è il quadrato dell'elemento  $x$  si scrive  $y = x^2$

Più in generale si scrive:

$$y = f(x)$$

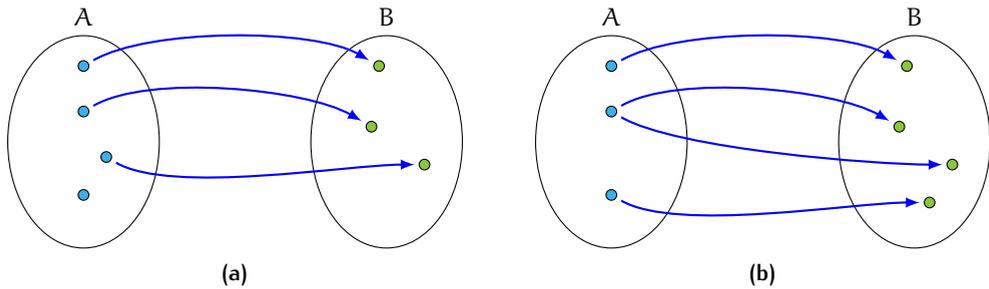


Figura 2: Relazioni che non sono funzioni

e si legge « $y$  è funzione di  $x$ », dove  $f(x)$  è un'espressione matematica nella variabile  $x$ , che esprime il legame tra  $x$  e  $y$ .

**Definizione 2.** Poiché la funzione  $f$  esprime in che modo  $y$  dipende da  $x$ , si dice che  $x$  è la *variabile indipendente* della funzione, mentre  $y$  è la *variabile dipendente*.

**Definizione 3.** L'elemento  $y \in B$  che è associato a un elemento  $x \in A$  è detto *immagine* di  $x$ .

Per esempio, nella funzione  $y = x^2$ , dove supponiamo che  $x$  sia un numero intero:

- 9 è l'immagine di 3, e si scrive  $f(3) = 9$
- 25 è l'immagine di 5, e si scrive  $f(5) = 25$

**Esercizio 1.** Le relazioni indicate nella figure 1 e 2 sono funzioni o no?

*Soluzione.*

- I casi rappresentati nella figura 1 rappresentano delle funzioni perché da ogni elemento di  $A$  esce una e una sola freccia verso un elemento di  $B$ .
- Il caso rappresentato nella figura 2a non rappresenta una funzione perché c'è un elemento di  $A$  da cui non esce alcuna freccia.
- Il caso 2b non rappresenta una funzione perché c'è un elemento di  $A$  da cui escono più frecce.  $\square$

### 1.3 FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE, BIUNIVOICHE

**Definizione 4.** Una funzione  $f: A \rightarrow B$  si dice *iniettiva* se a elementi diversi di  $A$  corrispondono sempre elementi diversi di  $B$ .

**Definizione 5.** Una funzione  $f: A \rightarrow B$  si dice *suriettiva* quando ogni elemento di  $B$  è immagine di almeno un elemento di  $A$ .

**Definizione 6.** Una funzione si dice *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva.

Con riferimento ai diagrammi a frecce:

- una funzione è iniettiva se non ci sono elementi di  $B$  a cui arrivano più frecce
- una funzione è suriettiva se non ci sono elementi di  $B$  a cui non arriva alcuna freccia
- una funzione è biunivoca se non ci sono elementi di  $B$  a cui arrivano più frecce o a cui non arriva alcuna freccia

**Esercizio 2.** Stabilisci se le relazioni indicate nella figura 3 sono iniettive, suriettive, biunivoche.

*Soluzione.*

- La funzione rappresentata nella figura 3a è iniettiva (non ci sono elementi di  $B$  a cui arrivano più frecce) ma non suriettiva (c'è un elemento di  $B$  a cui non arriva alcuna freccia);
- La funzione rappresentata nella figura 3b è suriettiva (non ci sono elementi di  $B$  a cui non arriva alcuna freccia) ma non iniettiva (c'è un elemento di  $B$  a cui arriva più di una freccia);
- La funzione rappresentata nella figura 3c non è né iniettiva né suriettiva;
- La funzione rappresentata nella figura 3d è biunivoca. □

**Esercizio 3.** Siano  $A = \{\text{bambini}\}$ ,  $B = \{\text{donne}\}$  e  $f: A \rightarrow B$  la funzione « $x$  è figlio naturale di  $y$ ». Stabilisci se  $f$  è iniettiva e suriettiva.

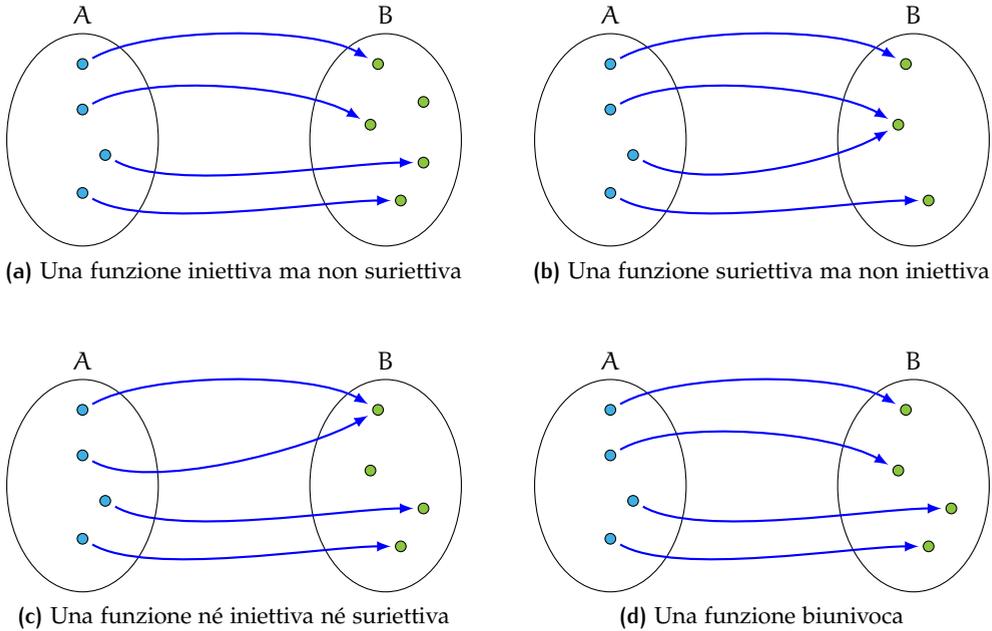


Figura 3: Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

*Soluzione.* È una funzione perché ogni bambino ha una e una sola madre naturale. Poiché bambini diversi si possono associare alla stessa madre, la funzione non è iniettiva. Poiché non tutte le donne sono madri, la funzione non è neanche suriettiva. La figura 4a dà un'idea del tipo di funzione. □

**Esercizio 4.** Siano  $A = \{\text{bambini}\}$ ,  $B = \{\text{madri}\}$  e  $f: A \rightarrow B$  la funzione « $x$  è figlio naturale di  $y$ ». Stabilisci se  $f$  è iniettiva e suriettiva.

*Soluzione.* Ogni madre, per definizione, lo è di qualche bambino: dunque la funzione è suriettiva. Più bambini si possono associare alla stessa madre: dunque la funzione non è iniettiva. La figura 4b dà un'idea del tipo di funzione. □

**Esercizio 5.** Sia  $A = B$  l'insieme dei numeri interi. Rappresenta la funzione  $f: A \rightarrow B$  « $y$  è l'intero successivo di  $x$ » con un diagramma a frecce.

*Soluzione.* La relazione « $y$  è l'intero successivo di  $x$ » è una funzione perché ogni numero intero, nessuno escluso, ha uno e un solo intero successivo. Questa funzione si può rappresentare con la scrittura  $y = x + 1$  e si ha per esempio che

$$f(-3) = -2 \quad f(-2) = -1 \quad f(-1) = 0 \quad f(0) = 1 \quad f(2) = 3 \quad f(3) = 4$$

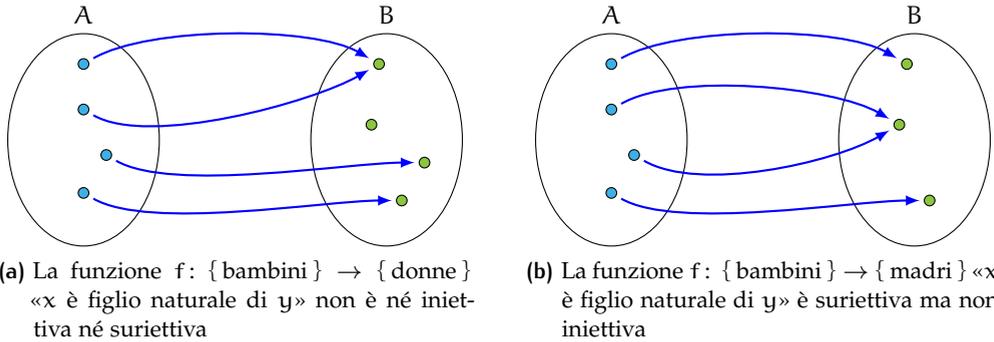


Figura 4: Due funzioni

La figura 5a mostra il diagramma a frecce della funzione, dove abbiamo rappresentato un numero limitato di elementi. Evidentemente, è una funzione biunivoca. □

**Esercizio 6.** Sia  $A$  l'insieme dei numeri interi e  $B$  l'insieme dei numeri interi positivi o nulli. Rappresenta la funzione  $f: A \rightarrow B$  « $y$  è il quadrato di  $x$ » con un diagramma a frecce.

*Soluzione.* La relazione « $y$  è il quadrato di  $x$ » è una funzione perché ogni numero intero, nessuno escluso, ha per quadrato uno e un solo numero positivo o nullo. Questa funzione si può rappresentare con la scrittura  $y = x^2$  e si ha per esempio che

$$f(3) = f(-3) = 9 \quad f(2) = f(-2) = 4 \quad f(1) = f(-1) = 1 \quad f(0) = 0$$

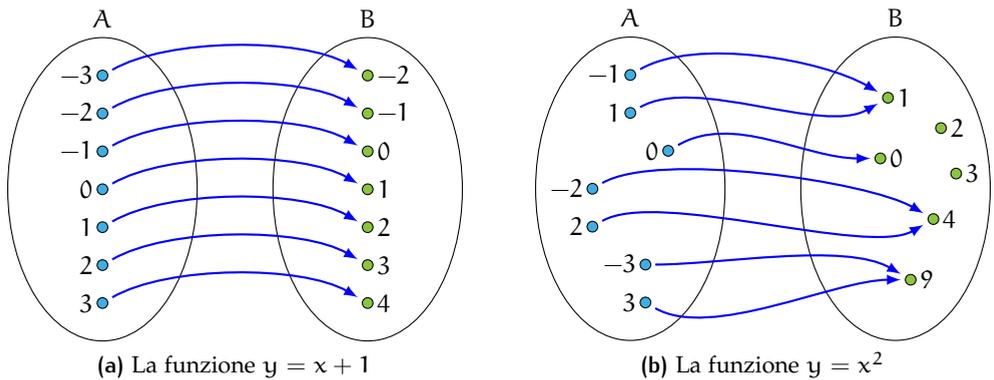
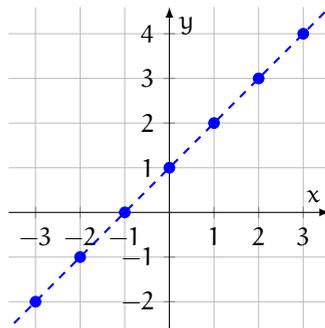


Figura 5: Due funzioni



(a) Grafico

$x$	$y = x + 1$
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

(b) Alcuni valori

Figura 6: La funzione  $y = x + 1$ 

La figura 5b mostra il diagramma a frecce della funzione, dove abbiamo rappresentato un numero limitato di elementi. È una funzione né iniettiva né suriettiva. □

## 1.4 RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Una funzione si può rappresentare, oltre che con un diagramma a frecce come abbiamo fatto finora, anche con un diagramma cartesiano.

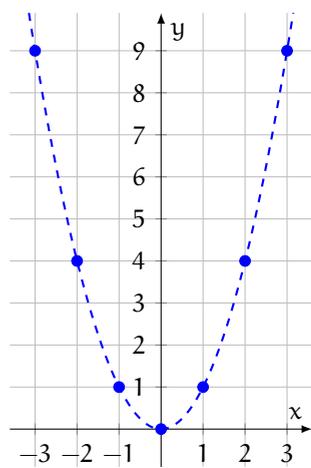
**Definizione 7.** Si chiama *grafico* o *diagramma cartesiano* di una funzione  $f: A \rightarrow B$  l'insieme delle coppie  $(x, y)$  formate da un elemento  $x \in A$  e dal suo corrispondente  $y \in B$ , con  $y = f(x)$ , rappresentate nel piano cartesiano.

**Esercizio 7.** Sia  $A = B$  l'insieme dei numeri interi. Rappresenta la funzione  $f: A \rightarrow B$  « $y$  è l'intero successivo di  $x$ » sul piano cartesiano.

*Soluzione.* La figura 6 mostra il grafico della funzione, dove abbiamo rappresentato un numero limitato di elementi. □

**Esercizio 8.** Sia  $A$  l'insieme dei numeri interi e  $B$  l'insieme degli interi positivi o nulli. Rappresenta la funzione  $f: A \rightarrow B$  « $y$  è il quadrato di  $x$ » sul piano cartesiano.

*Soluzione.* La figura 7 mostra il grafico della funzione sul piano cartesiano. □



(a) Grafico

$x$	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

(b) Alcuni valori

Figura 7: La funzione  $y = x^2$

## 1.5 ESERCIZI

# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

- 1 È vero che la relazione  $f$  che associa a ogni Regione italiana il suo capoluogo è una funzione? Qual è il suo dominio? Quanto vale  $f(\text{Emilia-Romagna})$ ?
- 2 Dati gli insiemi  $A = \{\text{scuola, alunno, professore, voto}\}$  e  $B$  l'insieme dei numeri naturali, la relazione che associa a ogni elemento di  $A$  il numero di lettere da cui è composta la parola è una funzione? Se sì, è iniettiva?
- 3 Si è ammessi a una facoltà universitaria se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 e 100. La relazione che associa a ogni alunno che ha superato il test il punteggio ottenuto è una funzione? Se sì, di che tipo?
- 4 La funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è iniettiva? Perché?
- 5 La funzione che associa a ciascuna automobile il proprio numero di targa è iniettiva? Perché?
- 6 Quali tra le seguenti relazioni sono funzioni?

Dominio	Codominio	Relazione
libri	autori	a ogni libro associa l'autore
canzoni	cantanti	a ogni canzone associa il cantante
portoni di una via	numeri	a ogni portone associa il numero civico
computer	sistemi operativi	a ogni computer associa il s.o. installato

- 7 Sia  $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi. La funzione  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  che associa a ogni intero il suo opposto è iniettiva? È suriettiva?
- 8 Sia  $\mathbb{Z}$  l'insieme dei numeri interi. La funzione  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  che associa a ogni intero il suo valore assoluto è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?
- 9 La funzione  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $y = x - 2$ , è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?
- 10 La relazione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \frac{1}{x}$  è una funzione?
- 11 La funzione  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \frac{1}{x}$ , è iniettiva? È suriettiva? È biunivoca?
- 12 Consideriamo la funzione  $f$  che associa ad ogni numero razionale il suo triplo.
  - a. Qual è l'immagine di 0?

- b. Quale elemento del dominio ha per immagine 5?
- c. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva?
- d. È vero che  $-1$  è immagine di  $-3$ ?
- e. La funzione è iniettiva?
- f. La funzione è biunivoca?

Fai il diagramma a frecce della funzione.

**13** Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilisci se la funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

a.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad y = 2x$

c.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad y = x^2$

b.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad y = x^2$

d.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = 2x$

**14** Data la funzione  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad y = 4 - x$ , rispondi alle seguenti domande.

- a. Qual è l'immagine di 0?
- b. Per quale  $x$  si ha  $f(x) = 0$ ?
- c. Quale elemento del dominio ha per immagine 5?
- d. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva?
- e. È vero che  $-1$  è immagine di 3? Perché?

# 2 | RETTE NEL PIANO CARTESIANO

## 2.1 FUNZIONI LINEARI

Una funzione si dice *lineare* se è definita da un'equazione del tipo:

$$y = mx + q$$

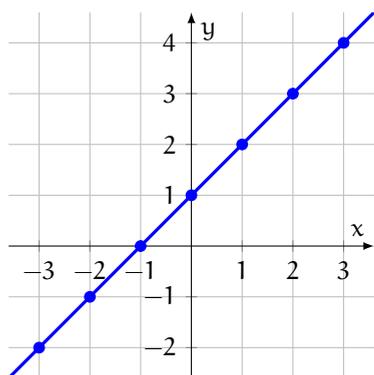
Il grafico di una funzione lineare è una retta. Per disegnarla basta determinare alcuni suoi punti (in linea di principio ne bastano due, poiché una retta è univocamente individuata da due suoi punti) e tracciare la retta che passa per essi.

**Esercizio 9.** Traccia per punti il grafico della funzione  $y = x + 1$ .

*Soluzione.* Per determinare alcuni punti del grafico della funzione diamo dei valori a scelta alla variabile  $x$  e calcoliamo i corrispondenti valori di  $y$ . Per esempio, sostituendo 2 al posto di  $x$  nell'equazione  $y = x + 1$  otteniamo:

$$y = 2 + 1 = 3$$

Attribuendo a  $x$  i valori  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$  e  $3$  otteniamo la tabella 8b. Rappresentando i punti corrispondenti e congiungendoli otteniamo la retta che costituisce il grafico di  $y = x + 1$  (figura 8a).  $\square$



(a) Grafico

$x$	$y = x + 1$
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

(b) Alcuni valori

Figura 8: La funzione  $y = x + 1$

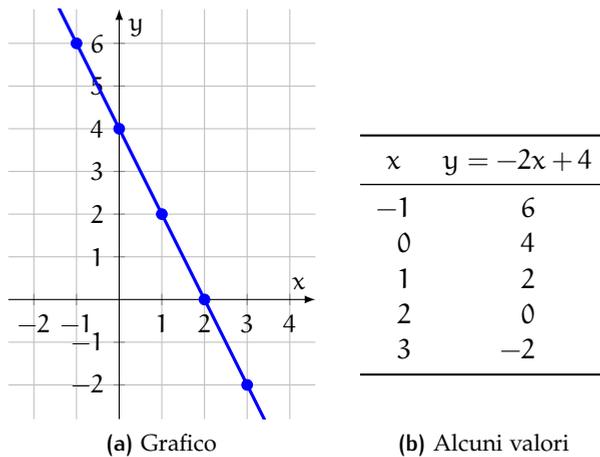


Figura 9: La funzione  $y = -2x + 4$ .

**Esercizio 10.** Traccia per punti il grafico della funzione  $y = -2x + 4$ .

*Soluzione.* La figura 9 mostra il grafico della funzione. □

## 2.2 APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA RETTA

Data una retta  $r$  e un punto  $P$  del piano cartesiano chiediamoci se  $P$  appartiene o no a  $r$ : il punto appartiene alla retta se le sue coordinate ne verificano l'equazione, mentre non appartiene alla retta se le sue coordinate non ne verificano l'equazione.

**Esercizio 11.** Data la retta  $r$  di equazione  $y = -2x + 4$ , stabilisci se i punti  $P = (1, 2)$  e  $Q = (3, 5)$  appartengono o no alla retta.

*Soluzione.*

- Sostituendo le coordinate del punto  $P$  nell'equazione della retta otteniamo:

$$2 = -2 \cdot 1 + 4$$

che è vero. Dunque  $P$  appartiene alla retta.

- Sostituendo le coordinate del punto  $Q$  nell'equazione della retta otteniamo:

$$5 = -2 \cdot 3 + 4$$

che è falso. Dunque  $Q$  non appartiene alla retta.

Vedi la figura 10. □

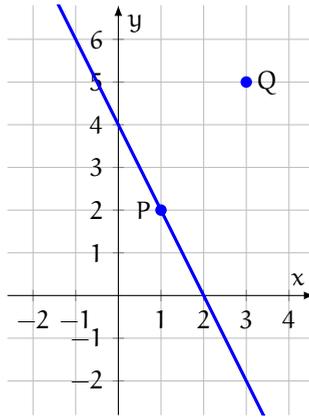


Figura 10: Appartenenza di un punto a una retta

## 2.3 PUNTI D'INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Spesso si è interessati a determinare i punti d'intersezione del grafico di una funzione lineare con gli assi cartesiani.

- I punti dell'asse  $x$  hanno ordinata uguale a 0. Quindi, per determinare l'ascissa  $x$  del punto d'intersezione del grafico di  $y = mx + q$  con l'asse  $x$ , basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = 0 \end{cases}$$

ovvero basta porre  $y = 0$  nell'equazione  $y = mx + q$  e risolvere l'equazione ottenuta.

- I punti dell'asse  $y$  hanno ascissa uguale a 0. Quindi, per determinare l'ordinata del punto d'intersezione del grafico di  $y = mx + q$  con l'asse  $y$ , basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x = 0 \end{cases}$$

ovvero basta porre  $x = 0$  nell'equazione  $y = mx + q$ .

**Esercizio 12.** Traccia il grafico della funzione lineare  $y = 2x - 4$ , dopo avere determinato i suoi punti d'intersezione con gli assi cartesiani.

*Soluzione.*

- Per determinare l'ascissa del punto d'intersezione del grafico con l'asse  $x$  poniamo  $y = 0$  nell'equazione  $y = 2x - 4$ . Otteniamo l'equazione:

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Quindi il grafico della funzione interseca l'asse  $x$  nel punto  $A(2, 0)$ .

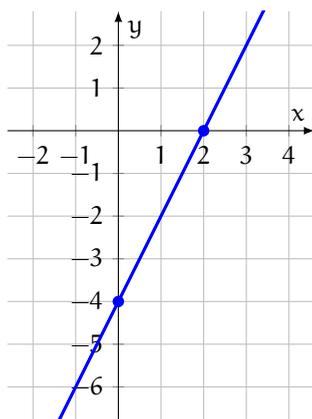


Figura 11: La funzione  $y = 2x - 4$

- Per determinare l'ordinata del punto d'intersezione del grafico con l'asse  $y$  poniamo  $x = 0$  nell'equazione  $y = 2x - 4$ . Abbiamo:

$$y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

Quindi il grafico della funzione interseca l'asse  $y$  nel punto  $B(0, -4)$ .

Il grafico di  $y = 2x - 4$  è la retta passante per  $A$  e  $B$  (figura 11). □

## 2.4 COEFFICIENTE ANGOLARE E ORDINATA ALL'ORIGINE

Nell'equazione  $y = mx + q$ , il coefficiente  $m$  si chiama *coefficiente angolare* e il coefficiente  $q$  *ordinata all'origine*. Per esempio, nella retta di equazione:

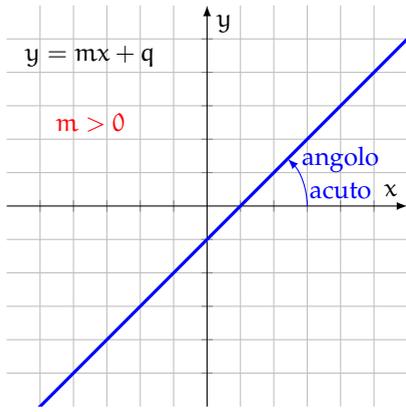
$$y = 2x + 3$$

il coefficiente angolare è 2 e l'ordinata all'origine è 3.

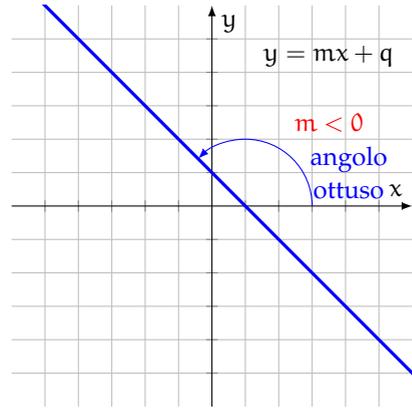
### *Significato del coefficiente $m$*

Il coefficiente angolare  $m$  dà informazioni sull'inclinazione rispetto all'asse  $x$  della retta che costituisce il grafico della funzione: per questo motivo  $m$  viene anche chiamato *pendenza* della retta.

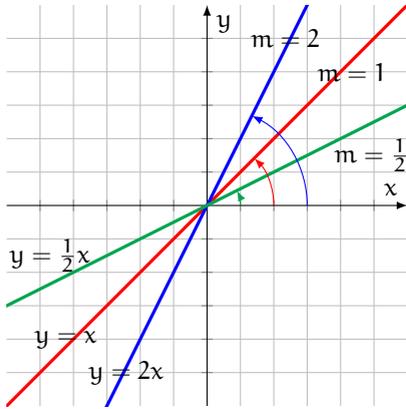
- Se  $m > 0$ , la retta grafico di  $y = mx + q$  forma con l'asse  $x$  un angolo acuto; percorrendo la retta da sinistra verso destra, si sale; si dice che il grafico della retta è *crescente* (figura 12a).
- Se  $m < 0$ , la retta grafico di  $y = mx + q$  forma con l'asse  $x$  un angolo ottuso; percorrendo la retta da sinistra verso destra, si scende: si dice che il grafico della retta è *decrescente* (figura 12b).



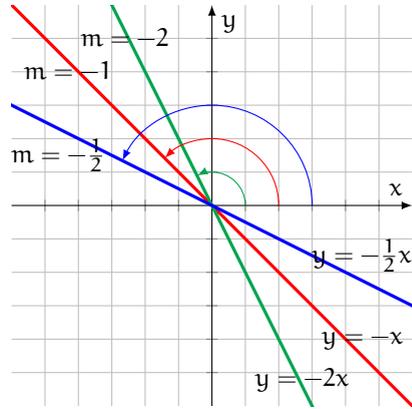
(a)



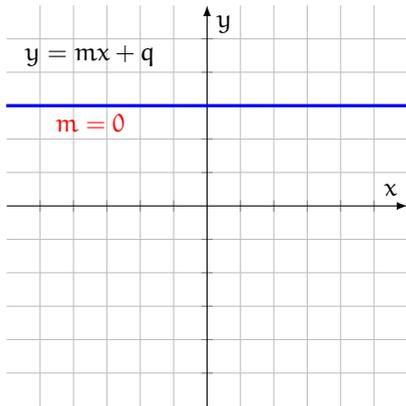
(b)



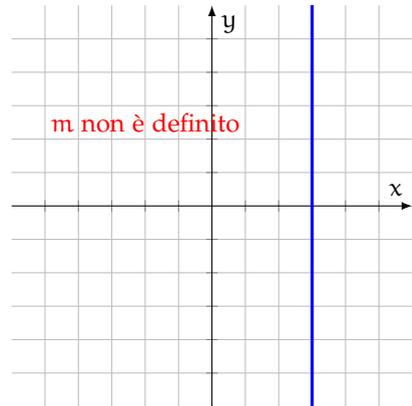
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 12: Significato del coefficiente m

- Se  $m > 0$ , al crescere di  $m$  le rette grafico di  $y = mx + q$  formano con l'asse  $x$  angoli acuti di ampiezza via via maggiore; in altre parole, al crescere di  $m$  si ottengono rette sempre più ripide (figura 12c).
- Se  $m < 0$ , al crescere del valore assoluto di  $m$  le rette grafico di  $y = mx + q$  formano con l'asse  $x$  angoli ottusi di ampiezza via via minore; in altre parole, al crescere del valore assoluto di  $m$  si ottengono rette sempre più ripide (figura 12d).
- Se  $m = 0$  il grafico di  $y = mx + q$  è una retta orizzontale, ovvero parallela all'asse  $x$  (figura 12e).

Una retta verticale *non* è il grafico di una funzione. Il coefficiente angolare di una retta verticale non è definito (figura 12f).

### Significato del coefficiente $q$

Il termine  $q$  è l'ordinata del punto d'intersezione del grafico di  $y = mx + q$  con l'asse  $y$ : infatti, ponendo  $x = 0$  nell'equazione  $y = mx + q$ , otteniamo  $y = q$  (figura 13).

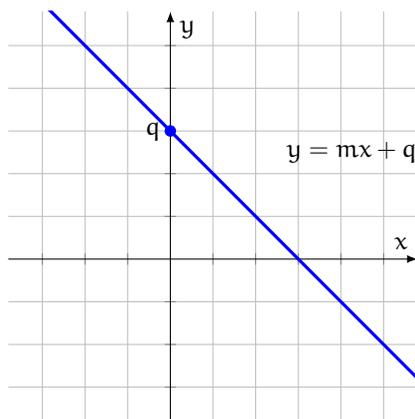


Figura 13: Significato del coefficiente  $q$

## 2.5 EQUAZIONE DELLA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Nel paragrafo precedente abbiamo impiegato il piano cartesiano come ambiente per tracciare il grafico di una funzione lineare.

In questo paragrafo, invece, adoteremo il punto di vista tipico della geometria analitica: quello di caratterizzare gli oggetti geometrici dal punto di vista algebrico.

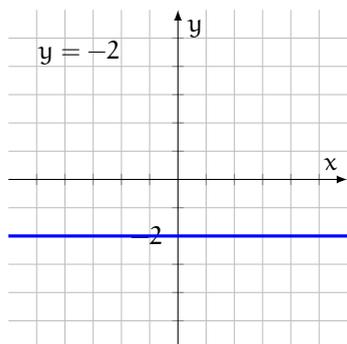
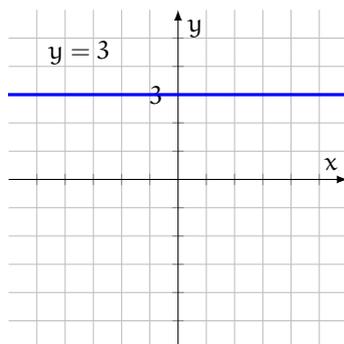
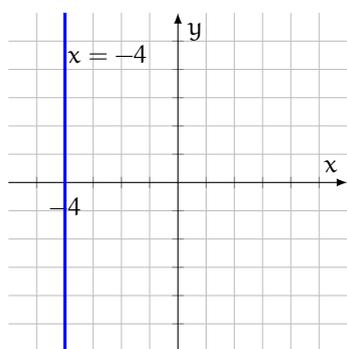
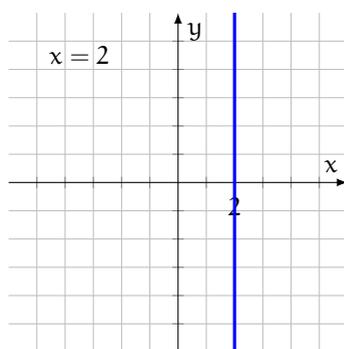
(a) Retta di equazione  $y = -2$ (b) Retta di equazione  $y = 3$ (c) Retta di equazione  $x = -4$ (d) Retta di equazione  $x = 2$ 

Figura 14: Rette parallele agli assi cartesiani

Sappiamo già che un punto si può identificare con una coppia ordinata di numeri reali; ora vogliamo caratterizzare, dal punto di vista algebrico, una *retta*. Più precisamente, cercheremo di determinare l'equazione di una generica retta, cioè di scrivere un'equazione che sia soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta. Iniziamo dai casi più semplici.

### Rette orizzontali e verticali

Supponiamo che  $r$  sia una retta *orizzontale*, ovvero parallela all'asse  $x$ . I punti appartenenti alla retta  $r$  sono caratterizzati dall'aver tutti la stessa ordinata, che indicheremo con  $h$ : perciò l'equazione della retta  $r$  è  $y = h$ . Per esempio, le rette disegnate nelle figure 14a e 14b hanno equazioni  $y = -2$  e  $y = 3$ .

Consideriamo ora una retta  $s$  *verticale*, ovvero parallela all'asse  $y$ . I punti della retta sono caratterizzati dall'aver tutti la stessa ascissa, che indicheremo con  $k$ : l'equazione della retta è perciò  $x = k$ . Per esempio, le rette disegnate nelle figure 14c e 14d hanno equazioni  $x = -4$  e  $x = 2$ .

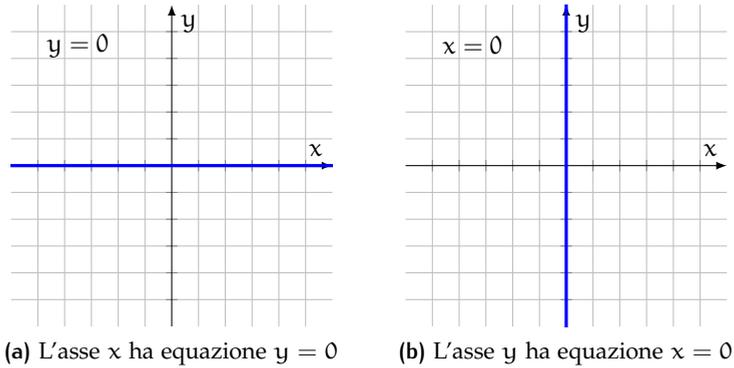


Figura 15: Assi cartesiani

### Assi cartesiani

La figura 15 mostra due casi particolari di rette orizzontali e verticali: l'asse  $x$ , di equazione  $y = 0$ , e l'asse  $y$ , di equazione  $x = 0$ .

### Rette passanti per l'origine

Una retta passante per l'origine, diversa dall'asse  $y$ , ha equazione del tipo  $y = mx$ , dove  $m$  è un numero reale.

Per esempio, la retta disegnata nella figura 16 passa per l'origine e per il punto  $P(1, 2)$ . L'equazione della retta è  $y = 2x$ .

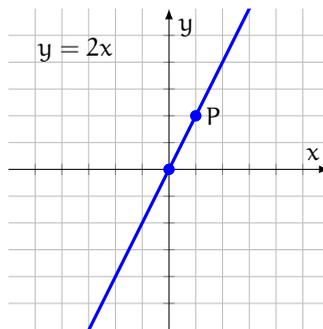


Figura 16: Una retta passante per l'origine

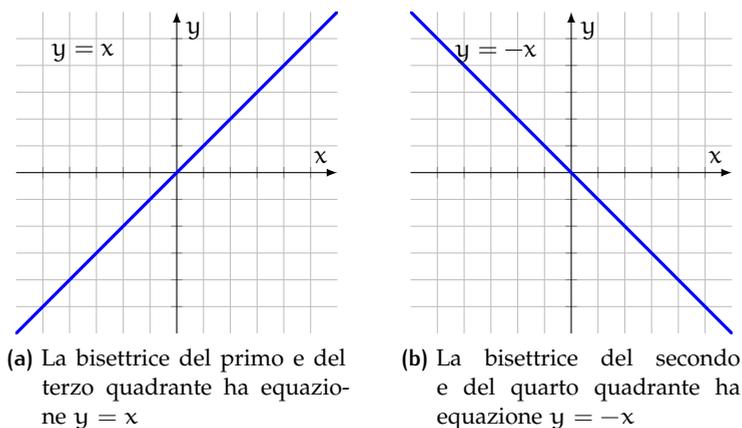


Figura 17: Bisettrici

### Bisettrici

La figura 17 mostra due casi particolari di rette passanti per l'origine: la bisettrice del primo e terzo quadrante e la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

### Retta generica

**Proposizione 1.** Ogni retta non verticale ha equazione  $y = mx + q$ , dove  $m$  e  $q$  sono numeri reali.

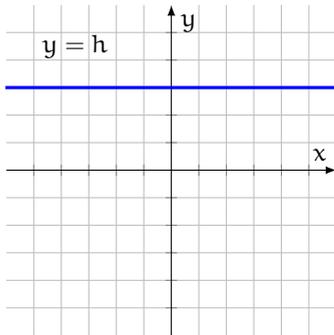
L'equazione  $y = mx + q$  comprende, come casi particolari, le equazioni delle rette orizzontali (che si ottengono quando  $m = 0$ ) e le equazioni delle rette passanti per l'origine (che si ottengono quando  $q = 0$ ). Restano escluse solo le rette verticali.

Quindi, data una retta nel piano cartesiano, ci sono due possibilità: o la retta è verticale, e quindi la sua equazione è  $x = k$ , oppure la sua equazione è  $y = mx + q$ .

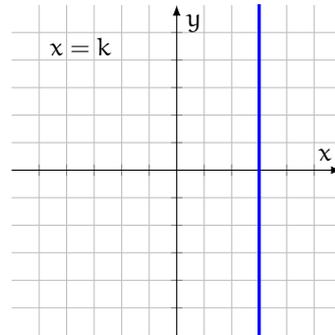
### Riepilogo

La figura 18 riassume i risultati fin qui ottenuti, evidenziando le equazioni dei vari tipi di retta.

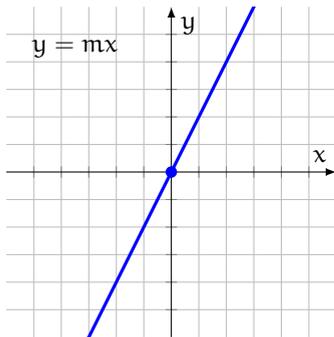
Ogni retta non verticale, avendo equazione  $y = mx + q$ , è il grafico di una funzione lineare; al contrario, le rette verticali non sono il grafico di una funzione perché a un solo valore di  $x$  corrispondono infiniti valori di  $y$  (ciò comporta che per queste rette il coefficiente angolare non è definito).



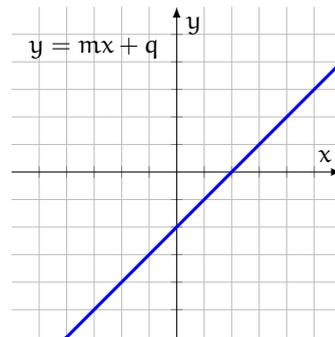
(a) Retta orizzontale; l'equazione della retta è  $y = h$ ; il coefficiente angolare è  $m = 0$



(b) Retta verticale; l'equazione della retta è  $x = k$ ; il coefficiente angolare non è definito



(c) Retta passante per l'origine, diversa dall'asse  $y$ : l'equazione della retta è  $y = mx$



(d) Retta generica non verticale: l'equazione della retta è  $y = mx + q$

Figura 18: Riassunto dei vari tipi di retta

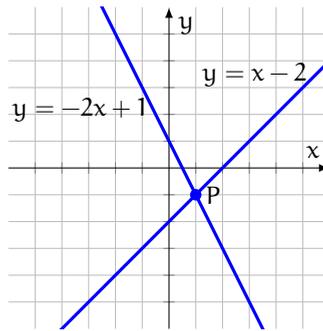


Figura 19: Le rette sono incidenti e  $P(1, -1)$  è il loro punto di intersezione

## 2.6 POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

Sappiamo dalla geometria euclidea che due rette  $r$  e  $s$  del piano possono essere:

- *incidenti*, se hanno in comune uno e un solo punto
- *parallele distinte*, se non hanno punti d'intersezione
- *coincidenti*

Dal punto di vista della geometria analitica, date due rette di equazioni assegnate, per discutere la loro posizione reciproca si considera il sistema delle loro equazioni:

- se il sistema è *determinato* le due rette sono incidenti e le coordinate del loro punto d'intersezione sono date dalla soluzione del sistema
- se il sistema è *impossibile* le due rette sono parallele distinte
- se il sistema è *indeterminato* le due rette sono coincidenti

**Esercizio 13.** Date le rette  $r$ , di equazione  $y = x - 2$ , e  $s$ , di equazione  $y = -2x + 1$ , stabilisci se sono incidenti, parallele distinte oppure coincidenti; se sono incidenti, determina le coordinate del loro punto d'intersezione.

*Soluzione.* Risolviamo il sistema delle equazioni delle rette assegnate.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x - 2 = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x = 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le rette sono incidenti e  $P(1, -1)$  è il loro punto di intersezione (figura 19).  $\square$

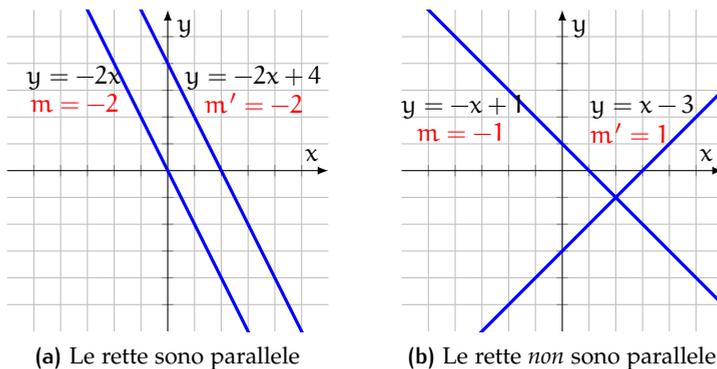


Figura 20: Parallelismo

### Rette parallele

La prossima proposizione permette di stabilire se due rette non verticali sono parallele senza risolvere il sistema delle loro equazioni.

**Proposizione 2.** Due rette non verticali, di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m'x + q'$ , sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. La condizione di parallelismo è quindi:

$$m = m'$$

**Esercizio 14.** Stabilisci se le rette  $y = -2x$  e  $y = -2x + 4$  sono parallele.

*Soluzione.* Le rette di equazione  $y = -2x$  e  $y = -2x + 4$  hanno entrambe coefficiente angolare uguale a  $-2$ , quindi sono parallele (figura 20a).  $\square$

**Esercizio 15.** Stabilisci se le rette  $y = -x + 1$  e  $y = x - 3$  sono parallele.

*Soluzione.* La retta di equazione  $y = -x + 1$  ha coefficiente angolare uguale a  $-1$ , mentre la retta di equazione  $y = x - 3$  ha coefficiente angolare uguale a  $1$ . Dal momento che le due rette hanno coefficienti angolari diversi, possiamo concludere che *non* sono parallele (figura 20b).  $\square$

### Rette perpendicolari

Dopo aver stabilito la condizione di parallelismo tra due rette nel piano cartesiano, poniamoci il problema di stabilire quale condizione algebrica traduce la loro

perpendicolarità. La condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarità di due rette non parallele agli assi è espressa dal prossima proposizione che ci limitiamo a enunciare.

**Proposizione 3.** Due rette non parallele agli assi, di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m'x + q'$ , sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari hanno prodotto  $-1$ . La condizione di perpendicolarità è quindi

$$m \cdot m' = -1$$

Dalla relazione  $m \cdot m' = -1$  si ricava che

$$m' = -\frac{1}{m}$$

Quindi se una retta ha coefficiente angolare  $m$ , con  $m \neq 0$ , una retta a essa perpendicolare ha coefficiente angolare uguale a  $-1/m$ , cioè all'opposto del reciproco (ossia all'*antireciproco*) di  $m$ .

**Esercizio 16.** Le rette  $y = 4x - 1$  e  $y = \frac{1}{4}x + 1$  sono perpendicolari?

*Soluzione.* I coefficienti angolari delle due rette sono

$$m = 4 \quad m' = 1/4$$

Poiché

$$m \cdot m' = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

le due rette *non* sono perpendicolari (figura 21a). □

**Esercizio 17.** Le rette  $y = -3x + 2$  e  $y = \frac{1}{3}x - 1$  sono perpendicolari?

*Soluzione.* I coefficienti angolari delle due rette sono

$$m = -3 \quad m' = 1/3$$

Poiché

$$m \cdot m' = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

le due rette sono perpendicolari (figura 21b). □

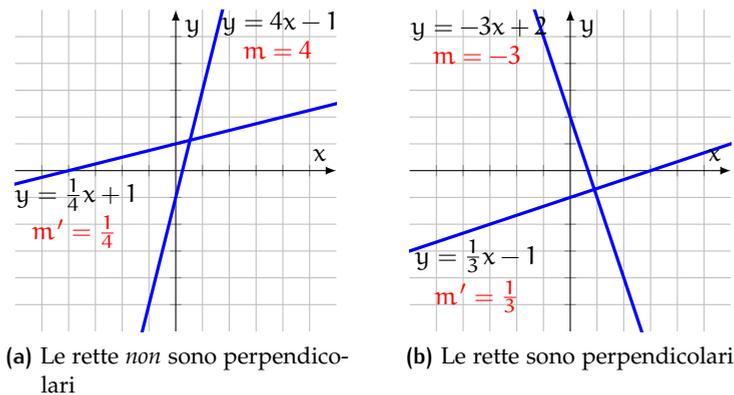


Figura 21: Perpendicolarità

## 2.7 DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Sappiamo dalla geometria euclidea che una retta è univocamente individuata quando se ne conoscono un punto e la direzione, oppure due punti. Trasferendoci nell'ambito della geometria analitica, scaturiscono i due seguenti problemi:

- determinare l'equazione di una retta passante per un punto  $P(a, b)$  e di coefficiente angolare  $m$  assegnato (il coefficiente angolare individua la direzione della retta);
- determinare l'equazione di una retta passante per due punti assegnati.

### Retta passante per un punto e di coefficiente angolare assegnato

La retta passante per un punto  $P(x_0, y_0)$  e di assegnato coefficiente angolare ha equazione

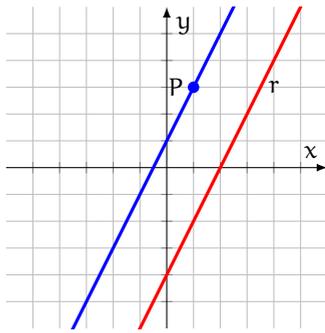
$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (1)$$

### Retta passante per un punto e parallela a una retta data

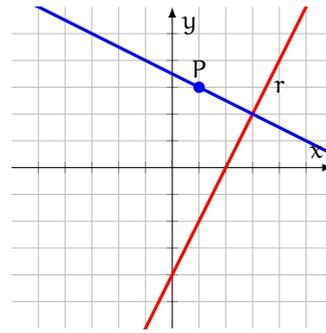
**Esercizio 18.** Determina l'equazione della retta passante per  $P(1, 3)$  e parallela alla retta  $r$  di equazione  $y = 2x - 4$ .

*Soluzione.* Il coefficiente angolare di  $r$  è 2. La retta passante per  $P(1, 3)$  e parallela a  $r$  non è altro che la retta passante per  $P$  e di coefficiente angolare uguale a 2. In base alla formula 1 la sua equazione è (figura 22a):

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \implies \quad y = 2x + 1 \quad \square$$



(a) Retta passante per un punto e parallela a una retta data



(b) Retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data

Figura 22: Retta passante per un punto e di direzione assegnata

**Retta passante per un punto e perpendicolare a una retta data**

**Esercizio 19.** Determina l'equazione della retta passante per  $P(1,3)$  e perpendicolare alla retta  $r$  di equazione  $y = 2x - 4$ .

*Soluzione.* Il coefficiente angolare della retta  $r$  è 2; quindi una retta perpendicolare a  $r$  deve avere coefficiente angolare  $-1/2$ . La retta cercata è allora quella passante per  $P(1,3)$  e di coefficiente angolare  $-1/2$ . In base alla formula 1 la sua equazione è (figura 22b):

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \square$$

**Retta passante per due punti**

Occupiamoci ora del secondo problema che avevamo introdotto all'inizio di questo paragrafo: scrivere l'equazione della retta passante per due punti  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  assegnati. Si dimostra anzitutto la seguente proposizione.

**Proposizione 4.** Il coefficiente angolare  $m$  della retta passante per  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , con  $x_1 \neq x_2$ , è uguale al rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di  $A$  e di  $B$ ; in simboli:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Questo rapporto è detto *rapporto incrementale*.

La figura 23 riporta l'interpretazione grafica della formula 2: il coefficiente angolare di una retta è il rapporto tra la variazione subita dalle ordinate e la variazione subita dalle ascisse nel passaggio da un punto di ascissa minore a un punto di ascissa maggiore. La variazione può essere un aumento (come nel caso in figura) o una diminuzione (nel caso di una retta che forma con l'asse  $x$  un angolo ottuso).

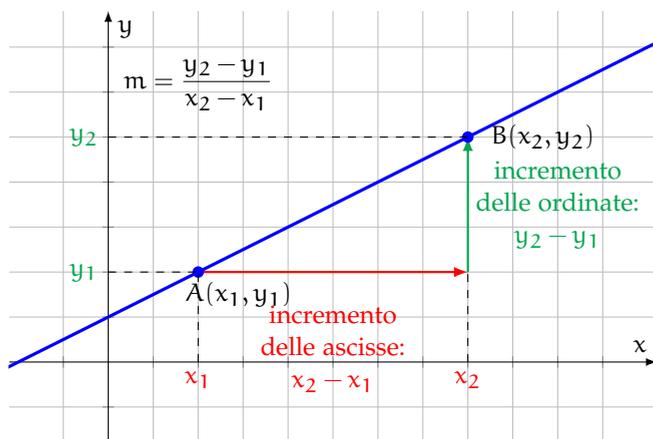


Figura 23: Il coefficiente angolare di una retta è il rapporto tra la variazione subita dalle ordinate e la corrispondente variazione delle ascisse

Ora possiamo risolvere il problema da cui siamo partiti, cioè scrivere l'equazione della retta passante per due punti  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ :

- se  $x_1 = x_2$ , la retta  $AB$  è verticale, quindi la sua equazione è  $x = x_1$ ;
- se  $x_1 \neq x_2$ , il coefficiente angolare  $m$  della retta  $AB$  si determina con la formula 2, e l'equazione della retta  $AB$  si ottiene scrivendo l'equazione della retta passante per  $A$  (o per  $B$ ), di coefficiente angolare  $m$ .

**Esercizio 20.** Scrivi l'equazione della retta passante per  $A(-1, 1)$  e  $B(3, 4)$

*Soluzione.* La retta  $AB$  non è verticale perché  $x_A \neq x_B$ . Calcoliamo anzitutto il coefficiente angolare  $m$  della retta  $AB$ .

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$$

Allora l'equazione della retta  $AB$  si trova scrivendo l'equazione della retta passante per  $A$  o per  $B$  e di coefficiente angolare  $3/4$ . Per esempio utilizziamo il

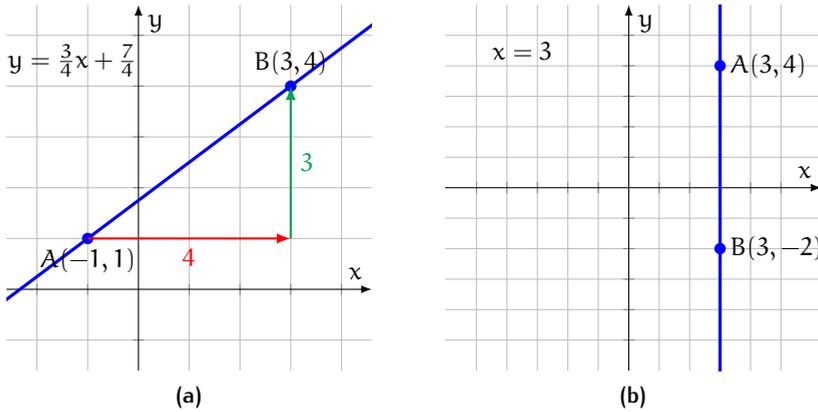


Figura 24: Retta passante per due punti

punto B. L'equazione della retta passante per B(3, 4) e di coefficiente angolare  $\frac{3}{4}$  è (figura 24a):

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \quad \square$$

**Esercizio 21.** Scrivi l'equazione della retta passante per A(3, 4) e B(3, -2)

*Soluzione.* I due punti A e B hanno la stessa ascissa, quindi la retta AB è verticale (figura 24b). La sua equazione è ovviamente  $x = 3$ .  $\square$

### Asse di un segmento

Le nozioni apprese in questo paragrafo ci permettono di affrontare un altro problema: determinare l'equazione dell'asse di un segmento AB, note le coordinate di A e di B. Il problema si risolve ricordando che l'asse di AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.

**Esercizio 22.** Determina l'equazione dell'asse del segmento AB, di estremi A(-3, 1) e B(5, 7).

*Soluzione.*

- Il punto medio di AB è

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-3 + 5}{2}, \frac{1 + 7}{2} \right) = (1, 4)$$

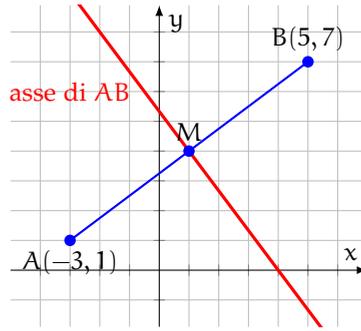


Figura 25: Asse di un segmento

- Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 1}{5 - (-3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

quindi una retta a essa perpendicolare (quale è l'asse) deve avere coefficiente angolare uguale a  $-4/3$ .

- L'asse di AB è la retta passante per  $M(1, 4)$  e di coefficiente angolare  $-4/3$  (figura 25), quindi ha equazione:

$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \quad \square$$

## 2.8 ESERCIZI

# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

**1** Vero o falso?

- a. I punti  $A(0, 2)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(6, 0)$  e  $D(2, -2)$  sono i vertici di un quadrato.  V  F
- b. Non esiste il coefficiente angolare della retta di equazione  $y = -2$ .  V  F
- c. La retta di equazione  $y = 2x + 3$  forma con l'asse  $x$  un angolo acuto.  V  F
- d. La retta di equazione  $y = 3x + 3$  interseca l'asse  $x$  in  $(-1, 0)$ .  V  F
- e. La retta di equazione  $y = -4x - 2$  interseca l'asse  $y$  in  $(0, -2)$ .  V  F
- f. Il punto  $P(2, 3)$  appartiene alla retta di equazione  $y = x - 1$ .  V  F
- g. La retta passante per  $A(10, 18)$  e  $B(11, 17)$  è parallela alla retta  $y = -x + 1$ .  V  F
- h. Le rette di equazioni  $y = -3x$  e  $y = x/3$  non sono perpendicolari.  V  F

[5 affermazioni vere e 3 false]

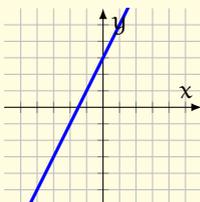
**2** Date le seguenti rette, individua il coefficiente angolare  $m$  e il termine noto  $q$ :

- a.  $y = 2x - 3$                       c.  $y = 1$                       e.  $y = -x$   
 b.  $y = -x + 1$                       d.  $y = x$                       f.  $y = -1$

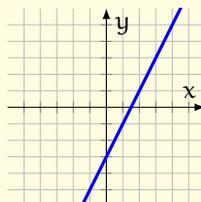
**3** Le rette disegnate nella figura seguente hanno le seguenti equazioni:

- a.  $y = -2x + 3$               b.  $y = 2x - 3$               c.  $y = -2x - 3$               d.  $y = 2x + 3$

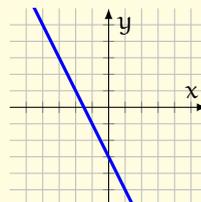
Associa a ciascuna retta la sua equazione.



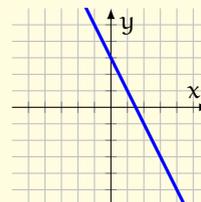
(a)



(b)



(c)



(d)

**4** Le rette disegnate nella figura seguente hanno le seguenti equazioni:

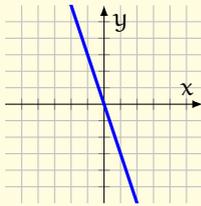
a.  $y = \frac{3}{2}x - 1$

b.  $y = -3x$

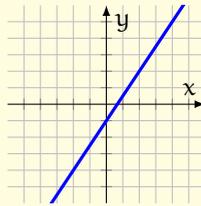
c.  $y = -2x + 1$

d.  $y = \frac{1}{2}x - 2$

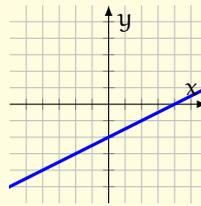
Associa a ciascuna retta la sua equazione.



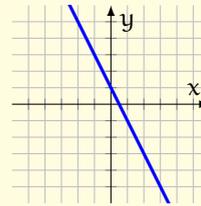
(a)



(b)



(c)

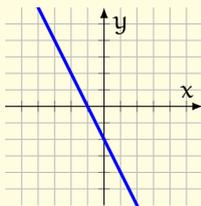


(d)

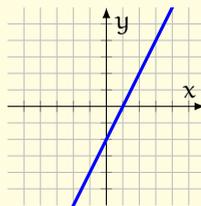
**5** Una funzione lineare è definita da un'equazione il cui termine noto è  $-3$ . Quali sono le coordinate del punto in cui il grafico della funzione interseca l'asse  $y$ ?

**6** Una funzione lineare è definita da un'equazione il cui coefficiente angolare è  $-3$ . L'angolo che la retta forma con l'asse  $x$  è acuto o ottuso?

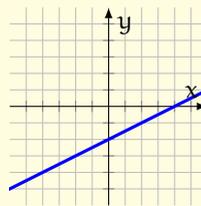
**7** Ciascuna delle rette disegnate nella figura seguente è il grafico di una funzione lineare, di equazione  $y = mx + q$ . Per ciascun grafico poni una crocetta sulle caselle che esprimono i segni di  $m$  e  $q$ .



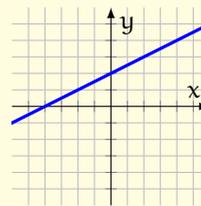
$m > 0$       $m < 0$   
  $q > 0$       $q < 0$



$m > 0$       $m < 0$   
  $q > 0$       $q < 0$



$m > 0$       $m < 0$   
  $q > 0$       $q < 0$



$m > 0$       $m < 0$   
  $q > 0$       $q < 0$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni lineari, dopo aver determinato le coordinate di almeno quattro punti.

**8**  $y = 2x$

**15**  $y = x - 5$

**22**  $y = x - 2$

**29**  $y = 4x + 4$

**9**  $y = -2x$

**16**  $y = 3x - 3$

**23**  $y = x - 3$

**30**  $y = 4x - 1$

**10**  $y = 2x - 4$

**17**  $y = 3x + 3$

**24**  $y = x + 3$

**31**  $y = 4x - 2$

**11**  $y = -2x + 4$

**18**  $y = -3x + 3$

**25**  $y = 2x - 2$

**32**  $y = 4x - 6$

**12**  $y = 4x - 4$

**19**  $y = -3x - 3$

**26**  $y = 2x + 2$

**33**  $y = x/2$

**13**  $y = x + 2$

**20**  $y = x - 1$

**27**  $y = 4x$

**34**  $y = x/3$

**14**  $y = -x + 3$

**21**  $y = x - 1$

**28**  $y = 4x + 2$

**35**  $y = -x/2$

Traccia il grafico delle seguenti funzioni lineari, dopo aver trovato i loro punti d'intersezione con gli assi (nelle risposte sono indicate solo le intersezioni con gli assi).

- 36  $y = -2x - 1$   $\left[ (0, -1), \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \right]$  40  $y = \frac{1}{2}x + 2$   $[(0, 2), (-4, 0)]$   
 37  $y = -x + 2$   $[(0, 2), (2, 0)]$  41  $y = -\frac{1}{2}x - 1$   $[(0, -1), (-2, 0)]$   
 38  $y = 3x + 3$   $[(0, 3), (-1, 0)]$  42  $y = -\frac{2}{3}x + 3$   $\left[ (0, 3), \left(\frac{9}{2}, 0\right) \right]$   
 39  $y = x - 3$   $[(0, -3), (3, 0)]$

43 Vero o falso?

- a. Ogni retta del piano cartesiano ha un'equazione del tipo  $y = mx + q$ .  V  F  
 b. Il coefficiente angolare della retta  $y = -1$  è zero.  V  F  
 c. Ogni retta verticale ha equazione del tipo  $x = k$ , dove  $k$  è un numero reale.  V  F  
 d. Una retta di equazione  $y = mx + q$  è parallela all'asse  $x$  se e solo se  $m = 0$ .  V  F  
 e. Il coefficiente angolare di ogni retta verticale è zero.  V  F

[3 affermazioni vere e 2 false]

44 Stabilisci se le seguenti coppie di rette sono formate da rette parallele distinte, incidenti o coincidenti.

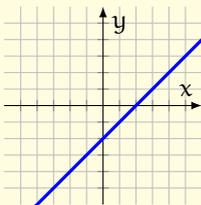
- a.  $x = 1$        $x = -1$       d.  $y = 1$        $y = x + 1$   
 b.  $y = x$        $y = -x$       e.  $y = x - 2$        $y = -x + 2$   
 c.  $y = x$        $x = y$       f.  $y = 0$        $y = 1$

[ Due coppie di rette parallele e distinte, tre coppie di rette incidenti e una coppia di rette coincidenti ]

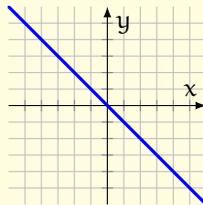
45 Ciascuna delle rette disegnate nella figura seguente ha una delle equazioni:

- a.  $x = -2$       b.  $y = -2$       c.  $y = -x$       d.  $y = x - 2$

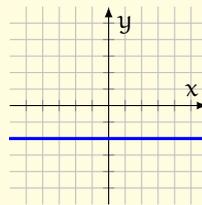
Associa a ogni grafico la sua equazione.



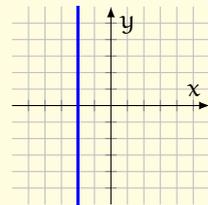
(a)



(b)



(c)



(d)

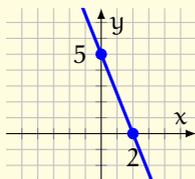
46 Completa la seguente tabella, sull'esempio della prima riga.

Equazioni delle rette		Coefficienti angolari		Le rette sono parallele?	
		m	m'		
$y = 2x + 1$	$y = -2x + 1$	2	-2	<input type="checkbox"/> Sì	<input checked="" type="checkbox"/> No
$y = 3x + 1$	$y = 3x - 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 0,5x + 1$	$y = 0,5x - 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 4x + 1$	$y = 0,25x + 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = x + 1$	$y = -x + 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No

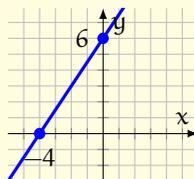
47 Completa la seguente tabella, sull'esempio della prima riga.

Equazioni delle rette		Coefficienti angolari		Le rette sono perpendicolari?	
		m	m'		
$y = x + 1$	$y = -x + 1$	1	-1	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 2x + 1$	$y = -2x + 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 3x + 1$	$y = 3x - 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 0,5x + 1$	$y = 0,5x + 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No
$y = 4x + 1$	$y = 0,25x + 1$			<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No

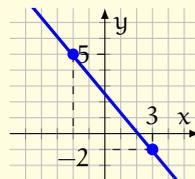
48 Determina il coefficiente angolare delle rette disegnate nella figura seguente.



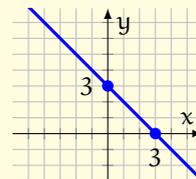
(a)



(b)



(c)



(d)

49 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti è l'equazione della retta passante per  $P(1, -3)$  e parallela alla retta di equazione  $y = 2x$ ?

A  $y = 2x - 5$

B  $y = 5x + 2$

C  $y = 2x + 5$

D  $y = x - 3$

b. Quale delle seguenti è l'equazione della retta passante per  $P(1, -3)$  e perpendicolare alla retta di equazione  $y = 2x$ ?

$$\boxed{A} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \boxed{B} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \quad \boxed{C} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \boxed{D} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

c. Quale delle seguenti formule fornisce il coefficiente angolare della retta passante per A(3,4) e B(5,7)?

$$\boxed{A} \quad m_{AB} = \frac{3-5}{4-7} \quad \boxed{B} \quad m_{AB} = \frac{4-3}{7-5} \quad \boxed{C} \quad m_{AB} = \frac{4-7}{5-3} \quad \boxed{D} \quad m_{AB} = \frac{7-4}{5-3}$$

d. Quale delle seguenti è l'equazione della retta passante per A(-1,0) e B(0,3)?

$$\boxed{A} \quad y = 3x - 3 \quad \boxed{B} \quad y = -3x + 3 \quad \boxed{C} \quad y = 3x + 3 \quad \boxed{D} \quad y = -3x - 3$$

e. Quale delle seguenti è l'equazione di una retta parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante?

$$\boxed{A} \quad y = x - 1 \quad \boxed{B} \quad y = -x + 1 \quad \boxed{C} \quad y = x + 1 \quad \boxed{D} \quad y = -2x + 3$$

[Una risposta A, due B, una C e una D]

**50** Scrivi l'equazione della retta passante per P e parallela alla retta r.

a. P(1,3)    r:  $y = 2x - 1$      $[y = 2x + 1]$     c. P(-1,3)    r:  $y = -2x - 1$      $[y = -2x + 1]$

b. P(-1,-2)    r:  $y = 2x + 1$      $[y = 2x]$     d. P(1,3)    r:  $y = -2x - 1$      $[y = -2x + 5]$

**51** Scrivi l'equazione della retta passante per P e perpendicolare alla retta r.

a. P(-1,1)    r:  $y = x + 1$      $[y = -x]$     c. P(-1,-2)    r:  $y = 2x + 1$      $\left[ y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \right]$

b. P(-1,1)    r:  $y = -\frac{1}{2}x + 2$      $[y = 2x + 3]$     d. P(-1,1)    r:  $y = -\frac{1}{4}x + 1$      $[y = 4x + 5]$

**52** Disegna la retta che passa per A e per B e trova, se c'è, il suo coefficiente angolare.

a. A(-4,0)    B(0,4)     $[1]$     d. A(-5,4)    B(0,4)     $[0]$

b. A(-3,0)    B(4,1)     $[1/7]$     e. A(-6,3)    B(9,0)     $[-1/5]$

c. A(-3,0)    B(6,3)     $[1/3]$     f. A(7,0)    B(7,8)     $[\text{non è definito}]$

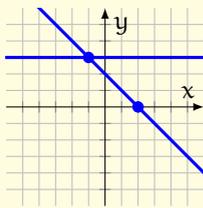
**53** Scrivi le equazioni delle rette passanti per A e per B.

a. A(-1,0)    B(3,4)     $[y = x + 1]$     d. A(0,3)    B(4,0)     $\left[ y = -\frac{3}{4}x + 3 \right]$

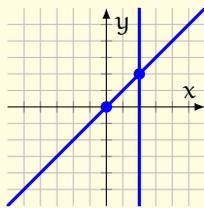
b. A $\left(0, \frac{1}{4}\right)$     B(-2,0)     $\left[ y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} \right]$     e. A(1,4)    B(-2,4)     $[y = 4]$

c. A(-1,-1)    B(-1,3)     $[x = -1]$     f. A(1,6)    B(4,0)     $[y = -2x + 8]$

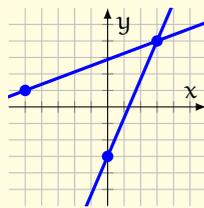
**54** Ciascuna delle seguenti figure rappresenta un sistema di due equazioni in due incognite. Per ciascuna figura scrivi un sistema che è rappresentato dalle rette raffigurate (un quadretto corrisponde all'unità).



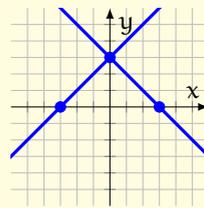
(a)



(b)



(c)



(d)

**55** Determina l'asse del segmento AB.

- a.  $A(-1, 3)$   $B(1, 5)$   $[y = -x + 4]$       c.  $A(0, 1)$   $B(2, 0)$   $[y = 2x - 3/2]$   
 b.  $A(-1, 0)$   $B(2, 3)$   $[y = -x + 2]$       d.  $A(1, -1)$   $B(3, -2)$   $[y = 2x - 11/2]$

**56** Determina la retta passante per  $P(4, 4)$  e parallela alla retta  $r: y = 2x - 4$  e la retta passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$  e disegna nel piano cartesiano.

**57** Disegna il triangolo di vertici  $A(-3, 1)$ ,  $B(0, 2)$  e  $C(2, -4)$ . Verifica che il triangolo è rettangolo, nei seguenti due modi:

- mostrando che è soddisfatto il teorema di Pitagora
- mostrando, mediante i coefficienti angolari, che i due lati sono perpendicolari

**58** Considera i punti  $A(0, 4)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(3, -5)$  e  $D(0, -1)$ . Verifica che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma nei seguenti tre modi:

- mostrando che i lati opposti sono congruenti
- mostrando che i lati opposti sono paralleli
- mostrando che i punti medi delle diagonali coincidono

Determina poi la misura del perimetro e dell'area di ABCD e il punto d'intersezione E delle diagonali.

$$\left[ \text{perimetro} = 20, \text{area} = 15, E = \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right]$$

**59** Indica la risposta corretta.

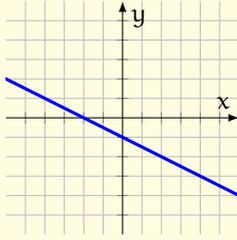
a. Il grafico nella figura seguente è quello della retta di equazione:

A  $y = \frac{1}{2}x + 1$

C  $y = \frac{1}{2}x - 1$

B  $y = -\frac{1}{2}x + 1$

D  $y = -\frac{1}{2}x - 1$



b. La retta di equazione  $y = 2x - 4$

- A ha coefficiente angolare uguale a  $-4$        C è parallela alla retta  $y = 2 - 4x$   
 B interseca l'asse  $x$  nel punto  $(2, 0)$        D interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, 2)$

c. Quale delle seguenti coppie di rette è costituita da due rette che non sono né parallele né perpendicolari?

- A  $y = 2x - 2$        $y = 2x + 2$        C  $y = 2x + 3$        $y = 3x + 2$   
 B  $y = x - 2$        $y = -x + 2$        D  $y = 3x + 2$        $y = 3x + 3$

d. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- A Ogni retta è il grafico di una funzione lineare.  
 B Ogni funzione lineare ha come grafico una retta.  
 C Ogni retta del piano cartesiano ha equazione  $y = mx + q$   
 D Le rette orizzontali non sono i grafici di funzioni lineari.

e. Le due rette di equazioni  $y = 2x$  e  $y = -2x + 4$ :

- A sono parallele       C sono perpendicolari  
 B hanno in comune il punto  $(1, 2)$        D nessuna delle precedenti

f. Sono dati i punti  $A(0, 3)$  e  $B(3, 0)$ . La retta  $AB$ :

- A passa per il punto  $(-1, 2)$        C è parallela alla retta  $y = 2x - 3$   
 B è parallela alla retta  $y = x + 3$        D nessuna delle precedenti

g. La retta passante per  $A(0, 3)$  e parallela alla retta  $y = x - 4$  è:

- A  $y = x + 3$        B  $y = -x + 3$        C  $y = x - 3$        D  $y = -x - 3$

h. La retta passante per  $A(0, 3)$  e perpendicolare alla retta  $y = x - 4$  è:

A  $y = x + 3$        B  $y = -x + 3$        C  $y = x - 3$        D  $y = -x - 3$

i. Quali sono le coordinate del punto di intersezione delle rette  $y = -x + 5$  e  $y = 2x - 1$ ?

A (3, 2)       B (2, 3)       C (-2, 3)       D (3, -2)

j. Se  $m \neq 0$ , il sistema  $\begin{cases} y = mx + q \\ y = 0 \end{cases}$

A è determinato       C è indeterminato  
 B è impossibile       D nessuna delle precedenti

[Due risposte A, cinque B, una C e due D]

**60** Indica la risposta corretta.

a. Che cosa rappresenta nel piano cartesiano l'equazione  $x = -11$ ?

A una retta orizzontale       C un punto sull'asse x  
 B una retta verticale       D un punto sull'asse y

b. Quanto vale la distanza tra i punti  $(-1, 1)$  e  $(2, 5)$ ?

A 2       B 3       C 4       D 5

c. Quale fra le seguenti rappresenta una funzione sempre decrescente il cui grafico non passa per l'origine?

A  $y = 2x - 1$        B  $y = -3x - 2$        C  $y = 5x$        D  $y = -6x$

d. Per quale valore di  $a$  la retta  $y = 3ax - 2a$  è parallela alla retta  $y = -12x + 1$ ?

A  $a = -4$        B  $a = -3$        C  $a = 3$        D  $a = 4$

e. Tre vertici di un rettangolo hanno coordinate  $(2, -2)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(66, -66)$ . Quali sono le coordinate del quarto vertice?

A  $(0, -132)$        B  $(-62, 70)$        C  $(64, -64)$        D  $(64, -68)$

f. Quale delle seguenti coppie ordinate è soluzione dell'equazione  $3x - 4y = 5$ ?

A  $(7, 4)$        B  $(-7, 4)$        C  $(7, -4)$        D  $(-7, -4)$

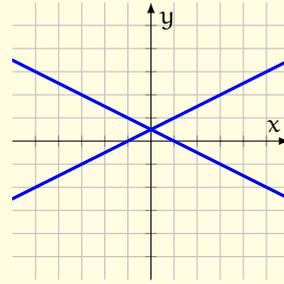
g. Quale dei seguenti sistemi è stato rappresentato graficamente nella figura?

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$



h. Nel piano cartesiano, la soluzione del sistema  $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$  rappresenta

A il punto di coordinate  $(-2, 1)$

C due rette non parallele

B due rette parallele e distinte

D il punto di coordinate  $(1, -2)$

i. Quale delle seguenti descrizioni corrisponde all'interpretazione grafica di un sistema di due equazioni lineari in due incognite privo di soluzioni? Le equazioni rappresentano due rette

A incidenti e perpendicolari

C parallele e distinte

B incidenti, ma non perpendicolari

D coincidenti

j. Se due rette si intersecano in un punto, il sistema costituito dalle loro equazioni è:

A indeterminato

C impossibile

B determinato

D nessuna delle precedenti

[Tre risposte A, tre B, una C e tre D]

61 Vero o falso?

a. L'equazione  $x = 0$  rappresenta l'asse delle ascisse.

V  F

b. Ogni retta passante per l'origine ha equazione  $y = mx$ .

V  F

c. Il coefficiente angolare dell'asse  $x$  è nullo.

V  F

d. Se  $k = 0$ , la retta di equazione  $y = -kx + 1$  è parallela all'asse  $x$ .

V  F

e. Il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse  $x$  è zero.

V  F

f. Il coefficiente angolare di una retta dipende dai punti scelti per calcolarlo.

V  F

g. Si può calcolare il coefficiente angolare di una qualsiasi retta del piano.

V  F

- h. Due rette qualsiasi hanno sempre coefficiente angolare diverso.  V  F
- i. Il coefficiente angolare di una retta verticale vale 0.  V  F
- j. Il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse  $x$  non è definito.  V  F

[3 affermazioni vere e 7 false]

**62** Vero o falso?

- a. Le rette di equazione  $x = 3$  e  $y = -2$  sono fra loro perpendicolari.  V  F
- b. Le rette di equazione  $y = 2x + 2$  e  $y = x + 2$  sono parallele.  V  F
- c. Le rette  $y = 3x$  e  $y = (2k - 1)x - 1$  sono parallele per  $k = 2$ .  V  F
- d. La retta di equazione  $x = 2$  passa per  $A(2, 0)$  e per  $B(5, 2)$ .  V  F
- e. Per i punti  $A(2, 3)$  e  $B(1, 2)$  passa una sola retta.  V  F
- f. La distanza di un punto dall'asse  $y$  è l'ordinata del punto.  V  F
- g. Le rette  $y = x$  e  $y = -x$  sono perpendicolari.  V  F

[4 affermazioni vere e 3 false]

**63** Vero o falso?

- a. Tutti i punti della bisettrice del primo e del terzo quadrante hanno l'ascissa uguale all'ordinata.  V  F
- b. Se i punti  $A$  e  $B$  hanno la stessa ordinata  $y_0$ , la retta  $AB$  ha equazione  $y = y_0$ .  V  F
- c. I coefficienti angolari di due rette perpendicolari (non parallele agli assi) sono uno il reciproco dell'altro.  V  F
- d. L'asse del segmento di estremi  $A(-7, 3)$  e  $B(1, 3)$  è una retta verticale.  V  F
- e. L'equazione  $x = k$ , dove  $k$  è un numero reale, rappresenta una retta verticale.  V  F
- f. Due rette non verticali sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.  V  F
- g. Il coefficiente angolare di ogni retta perpendicolare alla retta  $y = x/2$  è 2.  V  F
- h. Il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine esprime il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di un qualsiasi punto della retta.  V  F
- i. Se il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine è negativo, allora la retta appartiene al secondo e al quarto quadrante.  V  F
- j. L'equazione  $y = h$  rappresenta una retta verticale.  V  F

[6 affermazioni vere e 4 false]

**64** Indica la risposta corretta.

- a. Il punto  $P(-1, 2)$  appartiene a una fra le seguenti rette. Quale?

A  $y = -2x$        B  $y = 2x$        C  $y = x/2$        D  $y = -x/2$

b. Uno fra i seguenti punti *non* appartiene alla retta di equazione  $y = -x$ . Quale?

A  $(0, 0)$        B  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$        C  $(-\pi, \pi)$        D  $(3, 3)$

c. Il coefficiente angolare della retta di equazione  $y = 3x/2$  è:

A  $-2$        B  $2/3$        C  $3/2$        D  $-3/2$

d. Quale fra le seguenti equazioni rappresenta una retta parallela all'asse  $x$ ?

A  $y = -3x - 1$        B  $x = -2$        C  $y = -1$        D  $y = -x$

e. Una sola fra le seguenti equazioni *non* è quella di una retta parallela agli assi cartesiani. Quale?

A  $x = 3$        B  $y = 3$        C  $y = x$        D  $x = 0$

f. Il coefficiente angolare della retta passante per  $A(-1, -1)$  e  $B(2, 2)$  è:

A  $-2$        B  $-1$        C  $0$        D  $1$

g. Considera la retta  $r$  di equazione  $y = x - 2$ . Quale fra le seguenti rette è parallela a  $r$ ?

A  $y = -2x$        B  $y = x - 4$        C  $y = 2$        D  $y = 2x + 4$

[Una risposta A, una B, tre C e due D]

**65** Indica la risposta corretta.

a. Le seguenti rette sono tutte perpendicolari alla retta di equazione  $y = x + 2$ , *tranne* una. Quale?

A  $y = -x + 2$        B  $y = 1 - x$        C  $y = -x - 2$        D  $y = x - 2$

b. La retta che passa per i punti  $P(2, 1)$  e  $Q(-1, -5)$  ha equazione:

A  $y = 2x + 3$        B  $y = 2x - 3$        C  $y = 3x + 2$        D  $y = 3x - 2$

c. Il coefficiente angolare di una retta vale  $-1/3$ . Fra le seguenti coppie di punti, quale appartiene a tale retta?

A  $A(5,4)$  e  $B(2,5)$

C  $E(0,1)$  e  $F(2,7)$

B  $C(4,5)$  e  $D(5,2)$

D  $G(1,3)$  e  $H(4,4)$

d. Per quali valori di  $k$  la retta passante per i punti  $A(0,1)$  e  $B(2,k-1)$  è parallela all'asse  $x$ ?

A per nessun valore di  $k$

C per  $k = 2$

B per  $k \neq 2$

D per  $k = -2$

e. La retta di equazione  $y = 2kx - 1$  è perpendicolare alla retta di equazione  $y = x$  per:

A  $k = 0$

B  $k = 1/2$

C  $k = -1/2$

D ogni  $k \leq 0$

f. Se  $a = b = c = 0$ , l'equazione  $ax + by + c = 0$  rappresenta:

A un punto

C una retta

B nessun ente geometrico

D un piano

g. L'equazione della retta passante per il punto  $(2,0)$  e parallela alla retta di equazione  $y = 2x - 2$  è:

A  $y = 2x - 4$

B  $y = 2x + 4$

C  $y = 2$

D  $x = 2$

h. L'equazione della retta passante per i punti  $A(1,1)$  e  $B(-1,-5)$  è:

A  $y = 3x - 2$

B  $y = 3x + 2$

C  $y = 2x - 3$

D  $y = 2x + 3$

i. L'asse del segmento di estremi  $P(1,4)$  e  $Q(4,1)$  ha equazione:

A  $y = -2$

B  $y = x - 1$

C  $y = x + 4$

D  $y = x$

j. Considera il triangolo  $ABC$  di vertici  $A(0,3)$ ,  $B(-3,0)$  e  $C(3,0)$ . Della retta di equazione  $y = 3 - x$  fa parte:

A il lato  $AB$

B il lato  $BC$

C il lato  $AC$

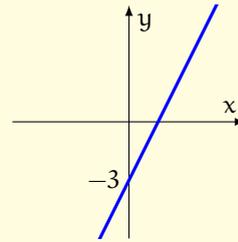
D l'altezza  $AH$

[Tre risposte A, una B, tre C e tre D]

**66** Indica la risposta corretta.

a. Quale tra le seguenti è l'equazione della retta rappresentata in figura?

- A  $y = -3x + 1$   
 B  $y = -3x - 3$   
 C  $y = 2x - 3$   
 D  $x = -3$



b. Considera le rette  $a: y = x + 1$ ,  $b: y = -x + 1$ ,  $c: y = x - 1$ . Puoi affermare che:

- A  $a$  e  $b$  sono parallele  
 B  $a$  e  $c$  sono perpendicolari  
 C  $b$  e  $c$  sono parallele  
 D  $b$  e  $c$  sono perpendicolari

c. Quale delle seguenti rette è verticale?

- A  $y = -x + 3$      B  $y = 5$      C  $x = 7$      D  $y = 0$

d. Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è *falsa*:

- A le rette verticali hanno coefficiente angolare uguale a 0  
 B le rette orizzontali hanno coefficiente angolare uguale a 0  
 C le rette passanti per l'origine hanno equazione con termine noto uguale a 0  
 D le rette non passanti per l'origine hanno il termine noto diverso da zero.

e. Quale delle seguenti affermazioni è *errata*? Il coefficiente angolare di una retta...

- A parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante è uguale a  $-1$   
 B perpendicolare all'asse delle ordinate è uguale a 0  
 C parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante è uguale a 1  
 D passante per l'origine delle coordinate è sempre uguale a 1

f. Quale tra le seguenti è l'equazione di una retta?

- A  $xy = 1$      B  $x^2 + y^2 = 1$      C  $y = x/\sqrt{2}$      D  $x^2 - x = 0$

g. Considera la retta di equazione  $y = 2x - 1$ . Una delle sue rette parallele ha equazione:

- A  $x = -2$      B  $y = 2x + 3$      C  $y = 2$      D  $y = x - 2$

[Una risposta A, una B, tre C e due D]

**67** Indica la risposta corretta.

a. Quale tra queste rette è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante?

A  $y = -2x - 8$      B  $y = -x - 1$      C  $y = x/2$      D  $y = x - 1$

b. Individua tra le seguenti la retta perpendicolare all'asse  $y$ .

A  $x = -2$      B  $y = 4$      C  $y = 2x - 1$      D  $y = -x$

c. Quale tra le seguenti è l'equazione di una retta che interseca l'asse  $y$  nel punto di ordinata  $-5$ ?

A  $y = -x - 5$      B  $y = 5$      C  $y = x + 5$      D  $x = -5$

d. Considera la retta di equazione  $y = -3x + 2$ . Una delle sue rette perpendicolari ha equazione:

A  $y = -3x - 2$      B  $y = 3x + 2$      C  $y = x/3$      D  $y = -x/3 + 2$

e. Individua tra le seguenti la retta parallela all'asse  $x$ .

A  $y = x$      B  $x = 3$      C  $y = x/2$      D  $y = 3$

f. Individua tra le seguenti rette l'asse  $y$ .

A  $y = x$      B  $y = -x$      C  $x = 0$      D  $y = 0$

g. Qual è l'equazione della retta orizzontale che passa per il punto  $P = (2, -5)$ ?

A  $y = -5x/2$      B  $y = -5$      C  $x = 2$      D  $y = -x - 3$

h. Qual è l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto  $P = (2, -5)$ ?

A  $y = -5x/2$      B  $y = -5$      C  $x = 2$      D  $y = -x - 3$

i. Qual è il punto di intersezione fra le rette  $y = 3x + 2$  e  $y = 2x + 4$ ?

A  $(0, 4)$      B  $(1, 5)$      C  $(2, 8)$      D  $(1, 6)$

j. Quale delle seguenti rette passa per i punti  $A = (2, 0)$  e  $B = (3, 2)$ ?

A  $y = x - 2$      B  $y = x - 1$      C  $y = 2$      D  $y = 2x - 4$

[Due risposte A, tre B, tre C e due D]

# 3

## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

### 3.1 RICHIAMI SULLE RADICI QUADRATE

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale  $a$  è il numero, sempre maggiore o uguale a zero, che si ottiene moltiplicando  $a$  per se stesso. L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato di un numero non negativo si chiama estrazione di *radice quadrata*.

**Definizione 8.** La *radice quadrata* di un numero  $a \geq 0$ , detto *radicando*, è quel numero  $b \geq 0$  che elevato al quadrato dà  $a$ . In simboli:  $b = \sqrt{a} \iff b^2 = a$ .

Non esiste la radice quadrata di un numero negativo, perché non c'è nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo. Per esempio:

- $\sqrt{9} = 3$ , perché  $3^2 = 9$
- $\sqrt{25} = 5$ , perché  $5^2 = 25$
- $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ , perché  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
- $\sqrt{1} = 1$ , perché  $1^2 = 1$
- $\sqrt{0} = 0$ , perché  $0^2 = 0$
- $\sqrt{-16}$  non esiste, perché il radicando è negativo

### 3.2 RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

**Definizione 9.** Un'equazione di secondo grado è un'equazione riconducibile alla *forma normale*  $ax^2 + bx + c = 0$ , dove  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono numeri reali, con  $a \neq 0$ . I valori  $a$ ,  $b$  e  $c$  si chiamano *coefficienti* e, in particolare,  $c$  è detto *termine noto*.

Un'equazione di secondo grado si dice:

- *pura* quando il secondo coefficiente è nullo:  $ax^2 + c = 0$
- *spuria* quando il terzo coefficiente è nullo:  $ax^2 + bx = 0$
- *completa* quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero:  $ax^2 + bx + c = 0$

Per esempio, le equazioni

$$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - 4x = 0 \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

sono rispettivamente pura, spuria e completa.

### Equazioni pure

Un'equazione di secondo grado pura si risolve nel modo seguente:

- si porta al secondo membro il termine noto
- si dividono entrambi i membri per il coefficiente di  $x^2$
- se il secondo membro è positivo, si calcola la sua radice quadrata: le soluzioni saranno il valore di questa radice e il suo opposto
- se il secondo membro è negativo, l'equazione è impossibile

**Esercizio 23.** Risolvi l'equazione  $4x^2 - 9 = 0$ .

*Soluzione.* Portiamo il termine noto a secondo membro:

$$4x^2 = 9$$

Dividiamo entrambi i membri per il coefficiente di  $x^2$ :

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{9}{4} \implies x^2 = \frac{9}{4} \implies x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

L'equazione ha due soluzioni opposte:

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

□

**Esercizio 24.** Risolvi l'equazione  $4x^2 + 9 = 0$ .

*Soluzione.* Portiamo il termine noto a secondo membro:

$$4x^2 = -9$$

Dividiamo entrambi i membri per il coefficiente di  $x^2$ :

$$\frac{4x^2}{4} = -\frac{9}{4} \implies x^2 = -\frac{9}{4} \implies x = \pm \sqrt{-\frac{9}{4}}$$

che è impossibile. L'equazione non ha soluzioni:

$$S = \emptyset$$

□

## Equazioni spurie

Un'equazione di secondo grado spuria si risolve nel modo seguente:

- si portano tutti i termini a primo membro
- si raccoglie a fattor comune
- si uguagliano a zero entrambi i fattori (per la legge di annullamento del prodotto)
- si risolvono le due equazioni lineari ottenute
- si mettono insieme le soluzioni

**Esercizio 25.** Risolvi l'equazione  $2x^2 - 4x = 0$ .

*Soluzione.* Raccogliamo a fattor comune:

$$2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$$

da cui, uguagliando a zero entrambi i fattori:

$$2x = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$

per cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

L'equazione ha due soluzioni:

$$S = \{0, 2\} \quad \square$$

**Esercizio 26.** Risolvi l'equazione  $x^2 + x = 0$ .

*Soluzione.* Raccogliamo a fattor comune:

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

da cui, uguagliando a zero entrambi i fattori:

$$x = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

per cui

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1$$

L'equazione ha due soluzioni:

$$S = \{-1, 0\} \quad \square$$

## Equazioni complete

Per risolvere un'equazione di secondo grado completa nella forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ci sono due possibilità:

- se il polinomio al primo membro è un trinomio speciale o il quadrato di un binomio, lo si scompone, si uguagliano a zero i fattori e si mettono insieme le soluzioni trovate
- oppure si applica la seguente *formula risolutiva*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che permette di risolvere *tutte* le equazioni di secondo grado, comprese quelle incomplete che abbiamo già studiato.

L'espressione  $b^2 - 4ac$  si dice *discriminante* e si indica con la lettera greca  $\Delta$  (*Delta*). Si possono presentare tre casi:

- se  $\Delta > 0$  l'equazione ha due soluzioni distinte
- se  $\Delta = 0$  l'equazione ha una sola soluzione
- se  $\Delta < 0$  l'equazione non ha soluzioni

**Esercizio 27.** Risolvi l'equazione  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

*Soluzione.* L'equazione si può risolvere osservando che il polinomio al primo membro è un trinomio speciale:

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

da cui, uguagliando a zero i fattori:

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 3$$

Quindi l'equazione ha due soluzioni distinte:

$$S = \{2, 3\}$$

Vogliamo ritrovare lo stesso risultato applicando la formula risolutiva:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

da cui

$$x = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

che coincide con il risultato precedente. □

**Esercizio 28.** Risolvi l'equazione  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

*Soluzione.* Il polinomio al primo membro è un trinomio speciale:

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

da cui

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

L'equazione ha due soluzioni distinte:

$$\mathcal{S} = \{1, 3\} \quad \square$$

**Esercizio 29.** Risolvi l'equazione  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

*Soluzione.* Il polinomio al primo membro è un trinomio speciale:

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

da cui

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

L'equazione ha due soluzioni distinte:

$$\mathcal{S} = \{-1, 3\} \quad \square$$

**Esercizio 30.** Risolvi l'equazione  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .

*Soluzione.* Il polinomio al primo membro è il quadrato di un binomio:

$$(x - 3)^2 = 0 \quad \implies \quad x - 3 = 0 \quad \implies \quad x = 3$$

L'equazione ha una sola soluzione:

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

Vogliamo ritrovare lo stesso risultato applicando la formula risolutiva:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

che coincide con il risultato precedente. □

**Esercizio 31.** Risolvi l'equazione  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

*Soluzione.* Il primo membro è il quadrato di un binomio:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \implies (2x - 3)^2 = 0 \implies 2x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{2}$$

L'equazione ha una sola soluzione:

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\} \quad \square$$

**Esercizio 32.** Risolvi l'equazione  $2x^2 + 3x - 5 = 0$ .

*Soluzione.* A differenza degli esercizi precedenti, il polinomio al primo membro non è scomponibile con i metodi elementari, dal momento che non è né un trinomio speciale né il quadrato di un binomio. Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

da cui

$$x = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-3 + 7}{4} = 1$$

In conclusione:

$$S = \left\{ -\frac{5}{2}, 1 \right\} \quad \square$$

**Esercizio 33.** Risolvi l'equazione  $2x^2 - x - 1 = 0$ .

*Soluzione.* Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

da cui

$$x = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1 + 3}{4} = 1$$

In conclusione si ha che:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\} \quad \square$$

**Esercizio 34.** Risolvi l'equazione  $6x^2 - x - 2 = 0$ .

*Soluzione.* Applichiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

da cui

$$x = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

In conclusione:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\} \quad \square$$

**Esercizio 35.** Risolvi l'equazione  $x^2 + x + 1 = 0$ .

*Soluzione.* Poiché  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ , l'equazione è impossibile:

$$S = \emptyset \quad \square$$

### 3.3 EQUAZIONI FRATTE

In questo paragrafo affronteremo le equazioni fratte riconducibili a equazioni di secondo grado.

**Esercizio 36.** Risolvi l'equazione  $\frac{6}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{6}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

- Il mcm dei denominatori è  $2(x-3)(x+3)$ .
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -3 \quad \wedge \quad x \neq 3$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{6 \cdot 2 + 2(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)(x+3)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$6 \cdot 2 + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 3)$$

da cui

$$12 + 2x - 6 = x^2 - 9 \implies x^2 - 2x - 15 = 0 \implies (x + 3)(x - 5) = 0$$

da cui

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 5$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: la soluzione  $x = -3$  non è accettabile e l'insieme soluzione è

$$S = \{5\}$$

□

**Esercizio 37.** Risolvi l'equazione  $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x^2-x-2} = -\frac{3}{2}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{(x-2)(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

- Il mcm dei denominatori è  $2(x-2)(x+1)$ .
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{4 \cdot 2(x+1) + 2x}{2(x-2)(x+1)} = \frac{-3(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+1)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$4 \cdot 2(x+1) + 2x = -3(x-2)(x+1)$$

da cui, svolgendo i calcoli:

$$8(x+1) + 2x = -3(x^2 + x - 2x - 2) \implies 3x^2 + 7x + 2 = 0$$

- Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$$

da cui

$$x = \frac{-7 - 5}{6} = -2 \quad \vee \quad x = \frac{-7 + 5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: le soluzioni sono entrambe accettabili e l'insieme soluzione è

$$S = \left\{ -2, -\frac{1}{3} \right\} \quad \square$$

**Esercizio 38.** Risolvi l'equazione  $\frac{8}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2 - x}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{8}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{6}{x(x-1)}$$

- Il mcm dei denominatori è  $x(x-1)(x+1)$ .
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{8x(x-1) - 3(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{6(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste, e svolgiamo i calcoli:

$$8x^2 - 8x - 3(x^2 - 1) = 6x + 6 \quad \implies \quad 5x^2 - 14x - 3 = 0$$

- Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 60}}{10} = \frac{14 \pm \sqrt{256}}{10} = \frac{14 \pm 16}{10}$$

da cui

$$x = \frac{14 - 16}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x = \frac{14 + 16}{10} = 3$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: le soluzioni sono entrambe accettabili e l'insieme soluzione è

$$S = \left\{ -\frac{1}{5}, 3 \right\} \quad \square$$

**Esercizio 39.** Risolvi l'equazione  $\frac{x}{x^2-2x} - \frac{5}{3x^2-12} = \frac{2}{x}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{x}{x(x-2)} - \frac{5}{3(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x}$$

- Il mcm dei denominatori è  $3x(x-2)(x+2)$ .
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{3x(x+2) - 5x}{3x(x-2)(x+2)} = \frac{3 \cdot 2(x-2)(x+2)}{3x(x-2)(x+2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste, e svolgiamo i calcoli:

$$3x(x+2) - 5x = 6(x-2)(x+2) \quad \implies \quad 3x^2 - x - 24 = 0$$

- Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-24)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{1 \pm 17}{6}$$

da cui

$$x = \frac{1-17}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \quad \vee \quad x = \frac{1+17}{6} = 3$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: le soluzioni sono entrambe accettabili e l'insieme soluzione è

$$S = \left\{ -\frac{8}{3}, 3 \right\} \quad \square$$

**Esercizio 40.** Risolvi l'equazione  $\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

- Il mcm dei denominatori è  $(x-1)(x+1)$
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -1 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x^2 + (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$x^2 + x - 1 = 1 \quad \implies \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \implies \quad (x+2)(x-1) = 0$$

da cui

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 1$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: la soluzione  $x = 1$  non è accettabile e l'insieme soluzione è

$$S = \{-2\}$$

□

**Esercizio 41.** Risolvi l'equazione  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{x}{x-2}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$$

- Il mcm dei denominatori è  $(x-1) \cdot (x-2)$
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{(x-2)+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste:

$$x-2+2 = x^2-x \quad \implies \quad x^2-2x=0 \quad \implies \quad x(x-2)=0$$

da cui

$$x=0 \quad \vee \quad x=2$$

- Confrontiamo le soluzioni con le condizioni di esistenza: la soluzione  $x=2$  non è accettabile e l'insieme soluzione è

$$S = \{0\}$$

□

**Esercizio 42.** Risolvi la seguente equazione  $\frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ .

*Soluzione.*

- Scomponiamo i denominatori:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

- Il mcm dei denominatori è  $(x-1)(x-2)(x+2)$
- Imponiamo le condizioni di esistenza:

$$x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

- Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x^2(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)^2(x+2) - (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

- Moltiplichiamo entrambi i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste, e svolgiamo i calcoli:

$$x^2(x+2) = (x-2)^2(x+2) - (x-1)(x-2) \quad \implies \quad 5x^2 + x - 6 = 0$$

- Applichiamo la formula risolutiva:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)}}{2 \cdot 5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{-1 \pm 11}{10}$$

da cui

$$x = \frac{-1 - 11}{10} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5} \quad \vee \quad x = \frac{-1 + 11}{10} = 1$$

- Confrontiamo con le condizioni di esistenza: la soluzione  $x = 1$  non è accettabile e l'insieme soluzione è

$$S = \left\{ -\frac{6}{5} \right\} \quad \square$$

### 3.4 SCOMPOSIZIONE DEI TRINOMI DI SECONDO GRADO

Sai già scomporre alcuni trinomi di secondo grado:

- i trinomi di speciali (come  $x^2 - 5x + 6$ )
- i trinomi che sono quadrati di binomi (come  $x^2 - 6x + 9$ )

Questo paragrafo spiega come scomporre *qualsunque* trinomio di secondo grado

$$ax^2 + bx + c$$

Sulla base del numero di soluzioni dell'*equazione associata*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ovvero del segno del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , si possono distinguere i casi indicati nella tabella 1.

**Tabella 1:** Scomposizione del trinomio di secondo grado  $ax^2 + bx + c$

Discriminante	Soluzioni	Scomposizione
$\Delta > 0$	$x_1 \neq x_2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2$	$a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	impossibile	il trinomio è irriducibile

**Esercizio 43.** Scomponi  $x^2 - 5x + 6$ .

*Soluzione.* Sappiamo già scomporre questo trinomio speciale:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Vogliamo ritrovare questo risultato con il metodo appena spiegato. L'equazione associata ha due soluzioni:

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 3$$

Applichiamo la formula indicata nella tabella 1 nel caso  $\Delta > 0$ , con  $a = 1$ ,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ :

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

che coincide con il risultato precedente.  $\square$

**Esercizio 44.** Scomponi  $x^2 - 6x + 9$ .

*Soluzione.* Sappiamo già scomporre questo quadrato di binomio:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Vogliamo ritrovare questo risultato con il metodo appena spiegato. L'equazione associata ha una sola soluzione: Si ha:

$$x = 3$$

Applichiamo la formula indicata nella tabella 1 nel caso  $\Delta = 0$ , con  $a = 1$  e  $x_1 = 3$ :

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

che coincide con il risultato precedente.  $\square$

**Esercizio 45.** Scomponi  $2x^2 - x - 1$ .

*Soluzione.* A differenza dei trinomi dei due esercizi precedenti, questo trinomio non è scomponibile con i metodi elementari, non essendo né un trinomio speciale né il quadrato di un binomio. Risolviamo l'equazione associata:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Si ha:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

da cui

$$x = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1+3}{4} = 1$$

Applichiamo la formula indicata nella tabella 1 nel caso  $\Delta > 0$ , con  $a = 2$ ,  $x_1 = -\frac{1}{2}$  e  $x_2 = 1$ :

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x + 1)(x - 1) \quad \square$$

**Esercizio 46.** Scomponi  $6x^2 - x - 2$ .

*Soluzione.* Risolviamo l'equazione associata

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

Si ha:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

da cui

$$x = \frac{1-7}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Applicando la formula indicata nella tabella 1 nel caso  $\Delta > 0$ , con  $a = 6$ ,  $x_1 = -\frac{1}{2}$  e  $x_2 = \frac{2}{3}$ , il trinomio si scompone come:

$$6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)3\left(x - \frac{2}{3}\right) = (2x + 1)(3x - 2) \quad \square$$

**Esercizio 47.** Scomponi  $x^2 + x + 1$ .

*Soluzione.* Poiché  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ , l'equazione associata è impossibile e il trinomio è irriducibile (tabella 1).  $\square$

## 3.5 ESERCIZI

# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

1	$x^2 - 1 = 0$	[±1]	15	$4x^2 - 9 = 0$	[±3/2]
2	$x^2 = \frac{49}{25}$	[±7/5]	16	$9x^2 - 25 = 0$	[±5/3]
3	$2x^2 - 32 = 0$	[±4]	17	$6x^2 = 0$	[0]
4	$x^2 - 25 = 0$	[±5]	18	$4x^2 + 16 = 0$	[impossibile]
5	$16x^2 = 1$	[±1/4]	19	$1 + x^2 = 50$	[±7]
6	$3x^2 + 3 = 0$	[impossibile]	20	$27x^2 - 3 = 0$	[±1/3]
7	$x^2 - 9 = 0$	[±3]	21	$7x^2 = 28$	[±2]
8	$25 = 9x^2$	[±5/3]	22	$4x^2 - 4 = 0$	[±1]
9	$x^2 - 3 = 0$	[±√3]	23	$5x^2 - 125 = 0$	[±5]
10	$x^2 + 36 = 0$	[impossibile]	24	$x^2 - 4 = 0$	[±2]
11	$4 - x^2 = 0$	[±2]	25	$4x^2 + 9 = 0$	[impossibile]
12	$x^2 + 4 = 0$	[impossibile]	26	$3x^2 - 12 = 0$	[±2]
13	$x^2 = 49$	[±7]	27	$2x^2 - 18 = 0$	[±3]
14	$4 - 9x^2 = 0$	[±2/3]	28	$(2x - 3)^2 = x(x - 12) + 12$	[±1]
			29	$2x^2 - 98 = 0$	[±7]

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

30	$x^2 - 3x = 0$	[0, 3]	41	$3x^2 - 2x = 4x$	[0, 2]
31	$3x^2 - 2x = 0$	[0, 2/3]	42	$81x^2 = 9x$	[0, 1/9]
32	$7x^2 + 2x = 0$	[-2/7, 0]	43	$7x^2 - 2x = 0$	[0, 2/7]
33	$x^2 + 2x = 0$	[-2, 0]	44	$-2x^2 + 4x = 0$	[0, 2]
34	$x^2 + 5x = 0$	[-5, 0]	45	$(x - 2)^2 = 4$	[0, 4]
35	$x^2 - x = 0$	[0, 1]	46	$(x + 1)^2 = 1$	[-2, 0]
36	$18x^2 - 36x = 0$	[0, 2]	47	$77x - 11x^2 = 0$	[0, 7]
37	$2x^2 + 6x = 0$	[-3, 0]	48	$2x^2 - 10x = 0$	[0, 5]
38	$9x^2 + 16x = 0$	[-16/9, 0]	49	$2(x - 2)^2 - 7x = (x - 3)^2 - 1$	[0, 9]
39	$6x^2 = 5x$	[0, 5/6]	50	$4x^2 + 32x = 0$	[-8, 0]
40	$5x = 25x^2$	[0, 1/5]	51	$3x^2 + 6x = 0$	[-2, 0]

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

- |    |                                       |                                |     |                        |   |
|----|---------------------------------------|--------------------------------|-----|------------------------|---|
| 52 | $x^2 - 5x + 6 = 0$                    | [2, 3]                         | 83  | $4x^2 + 4x + 1 = 0$    | $\left[-\frac{1}{2}\right]$               |
| 53 | $x^2 + x - 20 = 0$                    | [-5, 4]                        | 84  | $5x^2 + 4x + 19 = 0$   | [impossibile]                             |
| 54 | $-x^2 + x + 42 = 0$                   | [-6, 7]                        | 85  | $3x^2 + 4x - 4 = 0$    | $\left[-2, \frac{2}{3}\right]$            |
| 55 | $-x^2 + 10x - 25 = 0$                 | [5]                            | 86  | $8x^2 - 10x + 3 = 0$   | $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$   |
| 56 | $-2x^2 + 7x - 5 = 0$                  | [1, 5/2]                       | 87  | $5x^2 - 17x - 12 = 0$  | $\left[-\frac{3}{5}, 4\right]$            |
| 57 | $3x^2 + 2x - 1 = 0$                   | [-1, 1/3]                      | 88  | $-4x^2 + 3x - 11 = 0$  | [impossibile]                             |
| 58 | $2x^2 - 3x + 1 = 0$                   | [1/2, 1]                       | 89  | $9x^2 + 9x + 2 = 0$    | $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$ |
| 59 | $3x^2 + x - 2 = 0$                    | [-1, 2/3]                      | 90  | $9x^2 - 30x + 25 = 0$  | $\left[\frac{5}{3}\right]$                |
| 60 | $x^2 + 5x - 14 = 0$                   | [-7, 2]                        | 91  | $x^2 + x + 13 = 0$     | [impossibile]                             |
| 61 | $x^2 - 6x + 9 = 0$                    | [3]                            | 92  | $3x^2 - x - 2 = 0$     | $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$            |
| 62 | $5x^2 - 6x + 5 = 0$                   | [impossibile]                  | 93  | $24x^2 - 17x - 20 = 0$ | $\left[-\frac{5}{8}, \frac{4}{3}\right]$  |
| 63 | $x^2 + x - 2 = 0$                     | [-2, 1]                        | 94  | $x^2 - 4x - 7 = 0$     | $\left[2 \pm \sqrt{11}\right]$            |
| 64 | $-2x^2 + x + 1 = 0$                   | $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ | 95  | $-2x^2 + 5x + 2 = 0$   | $\left[\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}\right]$  |
| 65 | $x^2 - 6 = x$                         | [-2, 3]                        | 96  | $x^2 + 3x - 4 = 0$     | [-4, 1]                                   |
| 66 | $x^2 - 4x + 3 = 0$                    | [1, 3]                         | 97  | $9x^2 - 9x + 2 = 0$    | $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$   |
| 67 | $2000x^2 - 5000x = -3000$             | $\left[1, \frac{3}{2}\right]$  | 98  | $-2x^2 - 2x + 40 = 0$  | [-5, 4]                                   |
| 68 | $x^2 - 6x + 5 = 0$                    | [1, 5]                         | 99  | $-x^2 - 4x - 4 = 0$    | [-2]                                      |
| 69 | $2x^2 - x - 3 = 0$                    | $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ | 100 | $x^2 - 7x + 10 = 0$    | [2, 5]                                    |
| 70 | $3x - 3 = x^2$                        | [impossibile]                  | 101 | $x^2 + 4x + 4 = 0$     | [-2]                                      |
| 71 | $x^2 - 4x = -10 + 3x$                 | [2, 5]                         | 102 | $x^2 - 4x - 21 = 0$    | [-3, 7]                                   |
| 72 | $10\,000x^2 - 40\,000x + 40\,000 = 0$ | [2]                            | 103 | $2x^2 - 5x + 3 = 0$    | $\left[1, \frac{3}{2}\right]$             |
| 73 | $32x^2 - 2x + 85 = 0$                 | [impossibile]                  | 104 | $-x^2 + 7x + 8 = 0$    | [-1, 8]                                   |
| 74 | $-2x^2 + 2x = (4x - 3)^2 - 1$         | $\left[\frac{4}{9}, 1\right]$  | 105 | $3x^2 - 21x + 30 = 0$  | [2, 5]                                    |
| 75 | $x^2 + 8 = -(3x - 7)^2$               | [impossibile]                  | 106 | $-x^2 - 7x - 12 = 0$   | [-4, -3]                                  |
| 76 | $x^2 - x - 12 = 0$                    | [-3, 4]                        | 107 | $9x^2 - 6x + 1 = 0$    | $\left[\frac{1}{3}\right]$                |
| 77 | $x^2 + 2x - 15 = 0$                   | [-5, 3]                        |     |                        |   |
| 78 | $x^2 + 9x + 18 = 0$                   | [-6, -3]                       |     |                        |   |
| 79 | $x^2 - 9x + 18 = 0$                   | [3, 6]                         |     |                        |   |
| 80 | $3x^2 + 5x - 8 = 0$                   | $\left[-\frac{8}{3}, 1\right]$ |     |                        |   |
| 81 | $2x^2 + 4x - 6 = 0$                   | [-3, 1]                        |     |                        |   |
| 82 | $-5x^2 + 5x + 10 = 0$                 | [-1, 2]                        |     |                        |   |

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

- 1108  $x(x^2 - 3x) + 2 = x^3$   $\left[\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$
- 1109  $2 - 3x(4 - x) = x^2 - 16$   $[3]$
- 1110  $\frac{x+1}{2} - \frac{x^2-1}{3} = 0$   $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$
- 1111  $(x-3)(x+1) = 3(x+1)^2$   $[-3, -1]$
- 1112  $2(x+3) = 6 - x^2$   $[-2, 0]$
- 1113  $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{6} = x^2 + 1$  [impossibile]
- 1114  $\frac{(2x-1)^2}{10} = \frac{3-x}{5} - \frac{1}{2}$   $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
- 1115  $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4} = 0$   $\left[\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\right]$
- 1116  $2x - x^2 = 3x + 1$  [impossibile]
- 1117  $4x^2 - 1 = 3x$   $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$
- 1118  $6x - 10 = x^2$  [impossibile]
- 1119  $4x - 15 = x^2$  [impossibile]
- 1120  $6x^2 - 24 = x - 2$   $\left[-\frac{11}{6}, 2\right]$
- 1121  $x^2 - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$   $[-3, 1]$
- 1122  $3(x+14)^2 = \frac{(x+14)^2}{2}$   $[-14]$
- 1123  $6x = x^2 - 4x + 16$   $[2, 8]$
- 1124  $\frac{(2x-3)^2}{4} - \frac{3}{2} + \frac{x}{2} = x(1-x)$   $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$
- 1125  $\frac{x(3-4x)}{4} = 2 - \frac{(x+2)^2}{2}$   $\left[0, \frac{11}{2}\right]$
- 1126  $(5x-3)^2 + (5x+3)^2 = 26$   $\left[-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right]$
- 1127  $x^2 = x + 2x^2 - 12$   $[-4, 3]$
- 1128  $x^2 - 2x + 7 = x - 2$  [impossibile]
- 1129  $\frac{x^2-4}{4} - \frac{(x-2)^2}{2} = 2 - x$   $[2, 10]$
- 1130  $\frac{x-2}{3} - \frac{x^2-1}{2} - 1 = 2x$   $\left[-\frac{7}{3}, -1\right]$
- 1131  $x^2 + 3 = 9 + 5x$   $[-1, 6]$
- 1132  $(1-x)(3+2x) = -3$   $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$
- 1133  $(x-2)^2 = 4 - 2(2x-3)$   $[\pm\sqrt{6}]$
- 1134  $x - \frac{2x+3}{3} = \frac{3x^2-4x}{6}$  [impossibile]
- 1135  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x+2)(x-2)}{8} = \frac{1}{4}$   $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$
- 1136  $x^2 - 7x - 10 = 4x^2 - 7x + 2$  [impossibile]
- 1137  $x^3 + x - (x+1)^3 = x^2 - x - 1$   $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$
- 1138  $(x - 123\,456\,789)^2 = 9$   $[123\,456\,786, 123\,456\,792]$
- 1139  $(x-1)(x-2)(x+1) = x^3 - (x-2)^2$   $[-6, 1]$
- 1140  $(2x+1)^2 + (x+2)(x+1) = x+2$   $\left[-1, -\frac{1}{5}\right]$
- 1141  $x(3-4x) + 3x = 12 + 6x - 6x^2$   $[\pm\sqrt{6}]$
- 1142  $(x-1)^2(x+2) + 7 = x^2(x+1) - 3x$   $[-3, 3]$
- 1143  $(123\,456\,789x - 987\,654\,321)^2 = -1$  [impossibile]
- 1144  $\frac{(x-3)^2}{2} = 1 - \frac{(x+1)(x-2)}{4}$   $\left[\frac{4}{3}, 3\right]$

- 145  $\frac{(2x-1)^2}{3} - \frac{(x-2)(1-2x)}{6} = 0$   $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$
- 146  $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(1-5x)(x+2)(x-2)}{5} = x^2(x-1)$   $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$
- 147  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^2 + x^3(1-x) = x(1-4x^2) - 1$   $[-1]$
- 148  $\frac{(3x-2)^2}{3} - \frac{(4x+1)^2}{6} = x^2 - 3 - \frac{16}{3}x$   $\left[\pm \frac{5}{2}\right]$
- 149  $\frac{(2x-1)^2}{5} - \frac{(x-2)(x+1)}{10} = \frac{2}{5}$   $[0, 1]$
- 150  $(3x - 987\,654\,321)^2 = (123\,456\,789 - 2x)^2$   $[222\,222\,222, 864\,197\,532]$
- 151  $\frac{(x-2)(x+1)}{3} + \frac{(x+1)(x-3)}{9} = 0$   $\left[-1, \frac{9}{4}\right]$
- 152  $\frac{(2x-3)^2}{2} - \frac{(x-1)(3-2x)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$   $\left[\frac{3}{2}\right]$
- 153  $(x-3)(x+3) + 5x = 5(x-5)$   $[\text{impossibile}]$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado fratte.

- 154  $\frac{3}{x} - 2 = x$   $[-3, 1]$
- 155  $\frac{4-3x}{x} = \frac{3-2x}{x^2}$   $[1]$
- 156  $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - 1$   $[\text{impossibile}]$
- 157  $\frac{x}{2} = \frac{x+2}{x-2} + 1$   $[0, 6]$
- 158  $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 0$   $[-2, -1]$
- 159  $\frac{2x+1}{x} = \frac{x}{2x+1}$   $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$
- 160  $\frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$   $\left[0, \frac{7}{4}\right]$
- 161  $\frac{x+1}{x-2} - \frac{3x}{x+3} = \frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$   $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$
- 162  $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{2-2x}{x^3}$   $[-1, 2]$
- 163  $\frac{x+3}{x+1} = x+3$   $[-3, 0]$
- 164  $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{x-4} = \frac{4x-9}{x^2-x-12}$   $[1]$
- 165  $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} = -5$   $\left[\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$
- 166  $\frac{1-x}{x-2} - \frac{4}{4-x^2} = 0$   $[-3]$
- 167  $\frac{2-x}{(x+2)^2} + \frac{8}{2x-4} = 0$   $\left[-6, -\frac{2}{3}\right]$
- 168  $\frac{(x-3)^2}{(x+2)^2} = 25$   $\left[-\frac{13}{4}, -\frac{7}{6}\right]$
- 169  $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}$   $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$
- 170  $\frac{1}{x+3} + \frac{4-x}{x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{4}$   $[-2, 1]$
- 171  $\frac{x}{3-2x} + \frac{1}{x+1} = 1$   $\left[0, \frac{2}{3}\right]$
- 172  $3x+1 - \frac{5x-4}{x+4} = x+4$   $[\pm 2]$
- 173  $\frac{1}{x} + 3 = 4 + 2x$   $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$
- 174  $\frac{4}{x+1} + \frac{x}{x-2} = \frac{x-3}{x^2-x-2}$   $[-5, 1]$
- 175  $\frac{3-2x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = 8 - \frac{3x}{x+1}$   $\left[-2, \frac{6}{5}\right]$
- 176  $\frac{5-4x}{x-3} = \frac{3}{x^2-6x+9}$   $\left[2, \frac{9}{4}\right]$
- 177  $x + \frac{5}{x} = 4$   $[\text{impossibile}]$

$$178 \quad \frac{2}{x-3} + \frac{3x}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-2x-3} \quad \left[ \frac{2}{3}, 2 \right]$$

$$179 \quad \frac{x^2+3x-2}{x^2+5x+6} + \frac{x}{x+2} = 3 \quad [-5, -4]$$

$$180 \quad \frac{3x+2}{x-1} - \frac{24}{x+1} = 0 \quad \left[ 2, \frac{13}{3} \right]$$

$$181 \quad \frac{2x-3}{2x^2-4x-16} = \frac{2x+4}{4x+8} \quad [-1, 5]$$

$$182 \quad \frac{4x+1}{x^2-9} + \frac{1-x}{x+3} = 6 - \frac{x}{x-3} \quad \left[ -\frac{13}{6}, 4 \right]$$

$$183 \quad \frac{5x}{1-x^2} + \frac{6}{3x-3} = \frac{5x-4}{2x+2} \quad \left[ 0, \frac{3}{5} \right]$$

$$184 \quad \frac{1-3x}{(x-1)^2} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \quad [-3, 0]$$

$$185 \quad \frac{4-3x}{x+2} - \frac{5(x-1)}{8-2x^2} = 0 \quad \left[ \frac{7}{6}, 3 \right]$$

$$195 \quad \frac{x-4}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{4-2x}{x-3} = 0$$

$$196 \quad \frac{4x-3}{x^2-4} - \frac{3x}{x-2} = \frac{4}{2-x} - \frac{4x}{2+x}$$

$$197 \quad \frac{3x+2}{2x^2-2x-12} - \frac{3-x}{4x-12} = -\frac{3}{x+2}$$

$$198 \quad \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2+x}{x^2+x} = 0$$

$$199 \quad \frac{x+4}{3x^2-9x} - \frac{4-3x}{x} = \frac{1}{3-x} + \frac{3x}{9-x^2} + 3$$

$$200 \quad \frac{6-x}{x^2-2x-15} - \frac{2-2x^2}{x+3} = 2x-4$$

$$201 \quad \frac{1}{2} \cdot \left( x - \frac{1}{x} \right) - 2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{x^2-1}{x}$$

$$202 \quad \frac{2x-1}{x+2} + \frac{1-2x}{x-2} = \frac{x-6}{x+2}$$

$$203 \quad \frac{x-1}{x+3} - \frac{x+1}{2-x} = \frac{17-x}{x^2+x-6}$$

$$204 \quad \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{1-2x}{1+2x} = \frac{6-8x^2}{1-4x^2}$$

$$205 \quad \frac{x}{x+2} - \frac{3-4x}{5-2x} = 1 - \frac{5}{x+2}$$

$$206 \quad (4x+6) \left( \frac{4}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = 0$$

$$207 \quad \frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{x^2+x-2}$$

$$186 \quad \frac{4}{3x} = 2x - \frac{2}{3} \quad \left[ -\frac{2}{3}, 1 \right]$$

$$187 \quad \frac{x+3}{x-2} + x = 9 \quad [3, 7]$$

$$188 \quad \frac{x-2}{x+3} - x = -6 + 2x \quad \left[ -\frac{8}{3}, 2 \right]$$

$$189 \quad \frac{6+x}{x-3} = \frac{x^2}{x-3} \quad [-2]$$

$$190 \quad \frac{2x-3}{x+2} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2-2x-8} \quad [2, 3]$$

$$191 \quad \frac{-2x+2}{x} + 4x = \frac{x+2}{2} \quad [\text{impossibile}]$$

$$192 \quad 3x - \frac{3x-1}{1-x} = \frac{3-x}{2} \quad [\text{impossibile}]$$

$$193 \quad \frac{x}{2x-4} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2} \quad [1 \pm \sqrt{2}]$$

$$194 \quad \frac{6+x}{x-3} = \frac{x^2}{x-3} \quad [-2]$$

[-1]

[1, 5]

[-19, 2]

[impossibile]

[impossibile]

$\left[ \frac{11}{2}, 4 \right]$

[-5, 1]

[impossibile]

[impossibile]

[impossibile]

[impossibile]

$\left[ -\frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right]$

[impossibile]

$$208 \quad \frac{x}{2x+1} + \frac{x+1}{2(x+2)} = \frac{x-1}{2x^2+5x+2}$$

[impossibile]

Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado.

$$209 \quad 2x^2 - 7x - 4 \quad [(x-4)(2x+1)] \quad 212 \quad 3x^2 + 5x - 2 \quad [(x+2)(3x-1)]$$

$$210 \quad 4x^2 + 4x - 15 \quad [(2x-3)(2x+5)] \quad 213 \quad 4x^2 - 24x + 20 \quad [4(x-5)(x-1)]$$

$$211 \quad 4x^2 - 9x + 2 \quad [(x-2)(4x-1)] \quad 214 \quad 3x^2 + 2x - 1 \quad [(3x-1)(x+1)]$$

215 Indica la risposta corretta.

a. L'equazione  $25x^2 + 1 = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = \pm 5$        B  $x = \pm 1/5$        C  $x = 4 \vee x = 1$        D è impossibile

b. L'equazione  $16x^2 - x = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = 4 \vee x = 1$        C  $x = 0 \vee x = \frac{1}{16}$

B  $x = \pm \frac{1}{4}$        D è impossibile

c. L'equazione  $4x^2 - 9x = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = \pm \frac{3}{2}$        B  $x = \pm \frac{9}{4}$        C  $x = \frac{3}{2} \vee x = 0$        D  $x = \frac{9}{4} \vee x = 0$

d. L'equazione  $9x^2 + 6x + 1 = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = \pm 3$        B  $x = \pm \frac{1}{3}$        C  $x = -\frac{1}{3}$        D è impossibile

e. L'equazione  $x^2 - 6x + 36 = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = \pm 6$        B  $x = \pm \sqrt{6}$        C  $x = 6$        D è impossibile

f. Il polinomio  $x^2 + 5x + 6$  si può scomporre in:

A  $(x+2)(x-3)$        B  $(x+2)(x+3)$        C  $(x-2)(x-3)$        D  $(x+5)(x+1)$

g. Quale di queste equazioni ha l'unica soluzione  $x = 3$ ?

A  $x^2 - 6x + 9 = 0$        C  $x^2 + 6x + 9 = 0$

B  $9 - x^2 = 0$        D  $3x^2 + 9x = 0$

[Una risposta A, una B, due C e tre D]

216 Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti equazioni traduce il seguente problema: «la somma del triplo del quadrato di  $x$  con il doppio di  $x$  è uguale a 5»?

A  $3 \cdot 2x + x^2 = 5$      B  $3x^2 = 2x + 5$      C  $3 \cdot 2x = x^2 + 5$      D  $3x^2 + 2x = 5$

b. Quale dei seguenti è un fattore del trinomio  $5x^2 - 3x - 2$ ?

A  $x + 1$      B  $x - 2$      C  $5x + 2$      D  $5x - 2$

c. Quale delle seguenti equazioni ha due soluzioni distinte, espresse da *numeri razionali non interi*?

A  $x^2 + 6x - 7 = 0$      C  $2x^2 + 3x + 5 = 0$

B  $4x^2 + 4x + 1 = 0$      D  $4x^2 + 8x - 5 = 0$

d. Una maestra porta in classe 100 caramelle da distribuire equamente tra gli alunni. Ci sono però 5 assenti, per cui ciascuno riceve una caramella in più di quelle che avrebbe ricevuto nel caso fossero stati tutti presenti. Da quanti alunni è composta la classe?

A 15     B 20     C 22     D 25

e. Un rettangolo ha perimetro 10 cm e area uguale a  $5 \text{ cm}^2$ . Indicata con  $x$  la misura (in cm) della base, quali delle seguenti equazioni permette di determinare  $x$ ?

A  $x(10 - x) = 5$      C  $x(5 - x) = 10$

B  $x + \frac{5}{x} = 10$      D  $2x + \frac{10}{x} = 10$

f. Quale dei seguenti trinomi *non* è riducibile in  $\mathbb{R}$ ?

A  $x^2 - 2x - 3$      B  $x^2 + x + 1$      C  $x^2 + x - 1$      D  $2x^2 + x - 10$

g. L'equazione  $x^2 - x - 1 = 0$  ha:

A due soluzioni discordi     C due soluzioni negative

B due soluzioni positive     D due soluzioni intere

h. Quale delle seguenti equazioni ha come soluzioni  $x = -2$  e  $x = 4$ ?

A  $x^2 - 2x + 8 = 0$      C  $x^2 + 2x + 8 = 0$

B  $x^2 + 2x - 8 = 0$      D  $x^2 - 2x - 8 = 0$

i. L'insieme delle soluzioni dell'equazione  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{2x^2 + 6x}$  è:

$$\boxed{A} \quad s = \left\{ -3, \frac{5}{2} \right\} \quad \boxed{B} \quad s = \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \quad \boxed{C} \quad s = \left\{ 3, \frac{5}{2} \right\} \quad \boxed{D} \quad s = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

j. Per quali valori di  $k$  l'equazione  $x^2 + kx + 9 = 0$  ha una sola soluzione?

$$\boxed{A} \quad k = \pm 2$$

$$\boxed{C} \quad k = \pm 6$$

$$\boxed{B} \quad k = \pm 4$$

$$\boxed{D} \quad \text{per nessun valore di } k$$

[Una risposta A, una B, due C e sei D]

**217** Indica la risposta corretta.

a. Quale fra le seguenti equazioni *non* ha soluzioni?

$$\boxed{A} \quad 5x^2 + 3x = 0$$

$$\boxed{C} \quad 5x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\boxed{B} \quad -5x^2 + 3 = 0$$

$$\boxed{D} \quad 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

b. Per quale valore di  $k$  l'equazione  $x^2 - 2x + k - 3 = 0$  ha una sola soluzione?

$$\boxed{A} \quad k = 2$$

$$\boxed{C} \quad k = 4$$

$$\boxed{B} \quad k = 3$$

$$\boxed{D} \quad \text{per nessun valore di } k$$

c. La somma dei reciproci di due interi consecutivi è  $7/12$ . Allora il prodotto dei due numeri vale:

$$\boxed{A} \quad 12$$

$$\boxed{B} \quad 24$$

$$\boxed{C} \quad 36$$

$$\boxed{D} \quad 42$$

d. L'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$  è di secondo grado se e solo se:

$$\boxed{A} \quad c \neq 0$$

$$\boxed{B} \quad a \neq 0$$

$$\boxed{C} \quad a = 0$$

$$\boxed{D} \quad b \neq 0$$

e. L'equazione  $5x^2 + 8x + 3 = 0$ :

$$\boxed{A} \quad \text{ha una sola soluzione}$$

$$\boxed{C} \quad \text{non ha soluzioni}$$

$$\boxed{B} \quad \text{ha una soluzione nulla}$$

$$\boxed{D} \quad \text{ha due soluzioni distinte}$$

f. L'equazione  $8x^2 - 5x + 3 = 0$ :

$$\boxed{A} \quad \text{ha una sola soluzione}$$

$$\boxed{C} \quad \text{non ha soluzioni}$$

$$\boxed{B} \quad \text{ha una soluzione nulla}$$

$$\boxed{D} \quad \text{ha due soluzioni distinte}$$

g. Qual è il discriminante  $\Delta$  dell'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ ?

- A  $b^2 + 4ac$        B  $b^2 - 4ac$        C  $b^2 - ac$        D  $-b^2 - 4ac$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

**218** Indica la risposta corretta.

a. La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado è:

- A  $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$        C  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   
 B  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a}$        D  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b - ac}}{2a}$

b. L'insieme soluzione dell'equazione  $5x^2 - 10x = 0$  è

- A  $\emptyset$        B  $\{0, 2\}$        C  $\{-2, 0\}$        D  $\{-2, 2\}$

c. L'insieme soluzione dell'equazione  $9x^2 - 4 = 0$  è

- A  $\emptyset$        B  $\left\{\pm \frac{3}{2}\right\}$        C  $\left\{\pm \frac{2}{3}\right\}$        D  $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

d. L'equazione  $x^2 + 4 = 0$

- A ha le soluzioni  $x = -2$  e  $x = 2$        C ha solo la soluzione  $x = 2$   
 B ha solo la soluzione  $x = -2$        D è impossibile

e. Il discriminante dell'equazione  $x^2 - 2x + 1 = 0$  è

- A 0       B -8       C 8       D 4

f. In un'equazione di secondo grado, se  $\Delta < 0$  le soluzioni:

- A non esistono       B sono diverse       C sono negative       D sono opposte

g. Qual è l'insieme soluzione dell'equazione  $2x^2 - 8 = 0$ :

- A  $\{\pm 2\}$        B  $\{-2\}$        C  $\{2\}$        D  $\emptyset$

[Tre risposte A, una B, due C e una D]

**219** Indica la risposta corretta.

a. Le equazioni  $x^2 + 1 = 0$  e  $x^2 - 1 = 0$ :

- A hanno entrambe due soluzioni  
 B la prima ha due soluzioni, la seconda nessuna  
 C la prima non ha soluzioni, la seconda ne ha due  
 D nessuna delle due ha soluzioni

b. Le soluzioni dell'equazione  $-3x^2 + 9x = 0$  sono:

- A  $x = 3 \vee x = 9$   C  $x = 0 \vee x = -3$   
 B  $x = 0 \vee x = 3$   D  $x = 3 \vee x = 1/3$

c. Il discriminante  $\Delta$  dell'equazione  $3x^2 - x = 0$  vale:

- A  $-2$   B  $0$   C  $1$   D  $1 - 12$

d. L'equazione  $ax^2 + c = 0$ , con  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ , ha soluzioni:

- A sempre  C se a e c sono concordi  
 B se a e c sono positivi  D se a e c sono discordi

e. Data equazione  $1 - 3x^2 = -5x$ , i coefficienti a, b e c da sostituire nella formula risolutiva sono:

- A  $a = -3, b = 1, c = -5$   C  $a = -3, b = 5, c = 1$   
 B  $a = 1, b = -3, c = 5$   D  $a = -3, b = -5, c = 1$

f. Un'equazione del tipo  $ax^2 + bx = 0$ , con  $a \neq 0$ :

- A ha sempre una soluzione nulla  
 B può non avere soluzioni  
 C se a e b sono concordi non ha soluzioni  
 D se a e b sono discordi non ha soluzioni

g. Per quale equazione le soluzioni sono corrette?

- A  $x^2 - 9 = 0$   $x = \pm 3$   C  $9x^2 = 0$   $x = \pm 3$   
 B  $x^2 + 1 = 0$   $x = \pm 1$   D  $3x^2 = 9$   $x = \pm 3$

[Due risposte A, una B, tre C e una D]

**220** Indica la risposta corretta.

a. Per quale equazione le soluzioni sono corrette?

A  $3x^2 - x = 0 \quad x = 0 \vee x = 3$

C  $x^2 = -x \quad x = -1 \vee x = 1$

B  $4x^2 = 4x \quad x = 0 \vee x = 1$

D  $3x^2 - 6x = 0 \quad x = -2 \vee x = 0$

b. L'equazione  $x^2 + k = 0$  ha soluzioni:

 A mai

 C per  $k \leq 0$ 
 B per ogni valore di  $k$ 
 D per  $k \geq 0$ 

c. Il discriminante dell'equazione  $4x^2 - 5x + 1 = 0$  è:

 A 9

 B 25

 C 29

 D 41

d. Quale delle seguenti equazioni ha il discriminante negativo?

A  $x^2 + 3x + 1 = 0$

C  $3x^2 - 4x - 5 = 0$

B  $2x^2 - 4x + 10 = 0$

D  $4x^2 - 3x - 2 = 0$

e. L'equazione  $2x^2 + 18 = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = \pm 3$

C  $x = -9$

B  $x = \pm 9$

 D è impossibile

f. L'equazione  $3x^2 + 5x - 2 = 0$  ha per soluzioni:

A  $x = -2 \vee x = 1/3$

C  $x = 2 \vee x = -1/3$

B  $x = -2 \vee x = 3$

D  $x = -2 \vee x = -2/3$

g. Le due equazioni  $2x^2 - 4 = 0$  e  $-x^2 + 2 = 0$ :

 A sono entrambe impossibili

 B hanno le stesse soluzioni

 C solo la prima ha soluzioni

 D la prima ha soluzioni doppie rispetto alla seconda

[Due risposte A, tre B, una C e una D]

**221** Indica la risposta corretta.

a. Se un'equazione di secondo grado ha discriminante nullo, allora l'equazione:



A  $b^2 - 4ac$

C  $b^2 + 4ac$

B  $b^2 - ac$

D  $\sqrt{b^2 - 4ac}$

b. Qual è la formula risolutiva di un'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ ?

A  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$

C  $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{a}$

B  $x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

D  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

c. Risolvendo un'equazione di secondo grado troviamo  $\Delta = 42$ . Che cosa possiamo affermare?

 A l'equazione è impossibile C l'equazione ha due soluzioni B l'equazione ha una sola soluzione D non si può dire niente

d. Risolvendo un'equazione di secondo grado troviamo  $\Delta = -9$ . Che cosa possiamo affermare?

 A l'equazione è impossibile C l'equazione ha due soluzioni B l'equazione ha una sola soluzione D non si può dire niente

e. Risolvendo un'equazione di secondo grado troviamo  $\Delta = 0$ . Che cosa possiamo affermare?

 A l'equazione è impossibile C l'equazione ha due soluzioni B l'equazione ha una sola soluzione D non si può dire niente

f. Per risolvere l'equazione  $2000x^2 - 8000x + 6000 = 0$  è conveniente:

 A moltiplicare tutto per 2000 C dividere tutto per 7000 B dividere tutto per 2000 D cambiare tutti i segni

g. Luca sta facendo il compito di matematica. Per risolvere l'equazione  $-x^2 + 6x - 5 = 0$  decide di cambiare tutti i segni, risolvendo quindi l'equazione  $x^2 - 6x + 5 = 0$ . Cosa possiamo affermare?

 A ha sbagliato B le soluzioni che troverà saranno opposte alle soluzioni della prima equazione C ha fatto bene D non possiamo dirlo con certezza

h. Francesca sta facendo il compito di matematica. Risolvendo un'equazione di secondo grado ha trovato tre soluzioni distinte. Cosa possiamo affermare?

- A ha sicuramente sbagliato qualcosa       C non c'è niente di strano  
 B non possiamo dire niente       D ha sicuramente fatto bene

i. Quante soluzioni ha l'equazione  $4x^2 = 0$ ?

- A nessuna       B una       C due       D tre

j. Quale tra le seguenti è un'equazione impossibile?

- A  $3x^2 - 2 = 0$        B  $-4x^2 + 3 = 0$        C  $-5x^2 = 0$        D  $x^2 + 16 = 0$

[Tre risposte A, tre B, due C e due D]

**223** Indica la risposta corretta.

a. Quale delle seguenti equazioni ha per soluzioni  $x = 1$  e  $x = 3$ ?

- A  $x^2 - 4x + 3 = 0$        C  $2x^2 + x - 1 = 0$   
 B  $x^2 + 3x + 2 = 0$        D  $2x^2 + 8x + 6 = 0$

b. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $5x^2 + 10x = 0$ ?

- A  $x = 2$        C  $x = 0 \vee x = 2$   
 B  $x = 0$        D  $x = 0 \vee x = -2$

c. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $2x^2 = 4$ ?

- A  $x = \pm 2$        C  $x = 2$   
 B  $x = -2$        D nessuna delle precedenti

d. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $-3x^2 = 5x^2 - 32$ ?

- A  $x = \pm 4$        B  $x = 4$        C  $x = \pm 2$        D  $x = 2$

e. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $123\,456\,789x^2 = -123\,456\,789$ ?

- A  $x = -1$        B  $x = \pm 1$        C impossibile       D non si sa

f. Quante soluzioni ha l'equazione  $-x^2 - 6x - 9 = 0$ ?

A nessuna       B una       C due       D tre

g. Quante soluzioni ha l'equazione  $2x^2 + x - 2 = 0$ ?

A nessuna       B una       C due       D tre

[Una risposta A, una B, tre C e due D]

**224** Indica la risposta corretta.

a. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $123\,456\,789x^2 = 123\,456\,789$ ?

A  $x = \pm\sqrt{123\,456\,789}$        C l'equazione è impossibile  
 B  $x = \pm 1$        D non si può stabilire

b. Date le equazioni  $x^2 - 6 = 0$  e  $x^2 + 6 = 0$ , quale delle seguenti affermazioni è vera?

A hanno entrambe due soluzioni  
 B sono entrambe impossibili  
 C la prima è impossibile, la seconda ha due soluzioni  
 D la prima ha due soluzioni, la seconda è impossibile

c. Quante soluzioni ha l'equazione  $(x - 987654321)^2 = -4$ ?

A nessuna       B una       C due       D non si sa

d. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $x^2 - 8000x + 15\,000\,000 = 0$ ?

A  $x = 3000 \vee x = 5000$        C  $x = -5000 \vee x = 3000$   
 B  $x = -3000 \vee x = 5000$        D  $x = -5000 \vee x = -3000$

e. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $3x(2x - 1) = 0$ ?

A  $x = -3 \vee x = 2$        C  $x = 0 \vee x = 1/2$   
 B  $x = 0 \vee x = 2$        D  $x = 0 \vee x = -1/2$

f. Quali sono le soluzioni dell'equazione  $(x - 1)(x + 1) = 0$ ?

A  $x = 0 \vee x = 1$        C  $x = \pm 1$   
 B  $x = 0 \vee x = -1$        D  $x = 1$

g. Di equazioni di secondo grado che abbiano come soluzioni 3 e -4:

A non ce ne sono

B ce n'è una sola

C ce ne sono due

D ce ne sono infinite

[Due risposte A, una B, due C e due D]



# 4

## PARABOLA

**Definizione 10.** Una *parabola* è l'insieme dei punti  $(x, y)$  del piano cartesiano che soddisfano l'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove  $a, b$  e  $c$  sono numeri reali, con  $a \neq 0$ .

In altre parole, una parabola è il grafico della funzione  $y = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ .

**Esercizio 48.** Rappresenta per punti la parabola  $y = x^2$ .

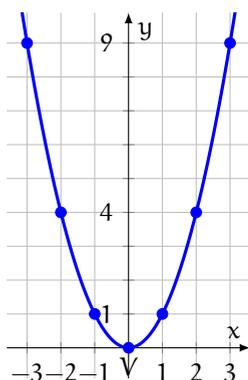
*Soluzione.* La figura 26 rappresenta il grafico per punti della parabola. □

**Esercizio 49.** Rappresenta per punti la parabola  $y = -x^2 + 4x - 3$ .

*Soluzione.* La figura 27 rappresenta il grafico per punti della parabola. □

La parabola è una curva che ha le seguenti proprietà:

- è simmetrica rispetto a una retta verticale, detta *asse* della parabola, che interseca la parabola in un punto  $V$  detto *vertice*

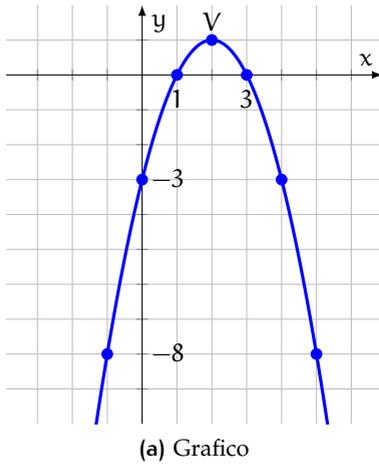


(a) Grafico

$x$	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$

(b) Alcuni valori

Figura 26: La parabola  $y = x^2$  disegnata per punti



$x$	$y = -x^2 + 4x - 3$
-1	$-(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = -8$
0	$-0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$
1	$-1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 0$
2	$-2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$
3	$-3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 0$
4	$-4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3$
5	$-5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -8$

(b) Alcuni valori

Figura 27: La parabola  $y = -x^2 + 4x - 3$  disegnata per punti

- “si allarga indefinitamente”, nel senso che qualunque retta verticale la interseca in uno e uno solo punto
- volge la concavità sempre dalla stessa parte

Il coefficiente  $a$  determina la *concavità* della parabola:

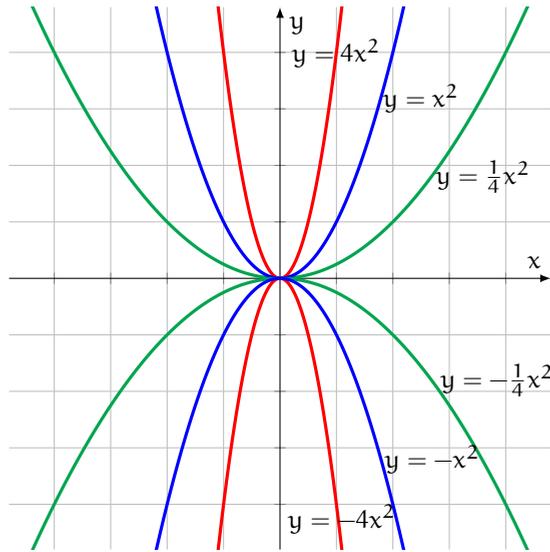
- se  $a > 0$  la parabola volge la concavità verso l’alto (figura 26)
- se  $a < 0$  la parabola volge la concavità verso il basso (figura 27)

Per una parabola che volge la concavità verso l’alto, il vertice  $V$  è il punto più basso del grafico (figura 26). Viceversa, per una parabola che volge la concavità verso il basso, il vertice  $V$  è il punto più alto del grafico (figura 27). Se provi a disegnare il grafico di alcune parabole di equazione  $y = ax^2$  con diversi valori di  $a$ , ti accorgerai che l’ampiezza delle parabole diminuisce quando  $a$  cresce in valore assoluto (figura 28).

Diversi fenomeni naturali sono legati alla parabola; la figura 29 ne riporta alcuni.

#### 4.1 APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA PARABOLA

Data una parabola e un punto  $P$  del piano cartesiano ci si può chiedere se  $P$  appartiene o no alla parabola: il punto  $P$  appartiene alla parabola se le sue coordinate ne verificano l’equazione, mentre non appartiene alla parabola se le sue coordinate non ne verificano l’equazione.



**Figura 28:** Parabole di equazione  $y = ax^2$ : l'ampiezza delle parabole diminuisce quando  $a$  cresce in valore assoluto

**Esercizio 50.** Data la parabola  $y = x^2$ , stabilisci se i punti  $P = (2, 4)$  e  $Q = (3, 4)$  appartengono o no alla parabola.

*Soluzione.*

- Sostituendo le coordinate del punto  $P$  nell'equazione della parabola otteniamo:

$$4 = 2^2$$

che è vero. Dunque  $P$  appartiene alla parabola.

- Sostituendo le coordinate del punto  $Q$  nell'equazione della parabola otteniamo:

$$4 = 3^2 = 9$$

che è falso. Dunque  $Q$  *non* appartiene alla parabola.

Vedi la figura 30. □

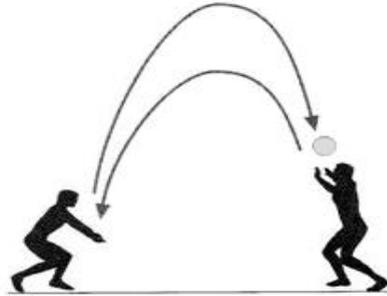
## 4.2 DISEGNO DI PARABOLE

Per disegnare una parabola conviene procedere nel modo seguente.

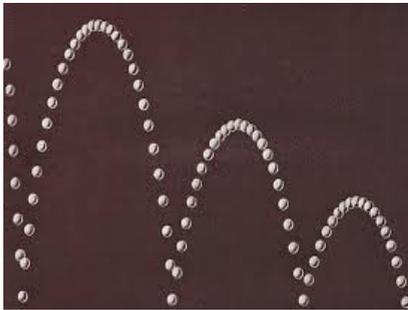
- Si trovano le intersezioni della parabola con gli assi cartesiani.



(a) Fontana d'acqua zampillante



(b) Palla lanciata da un giocatore



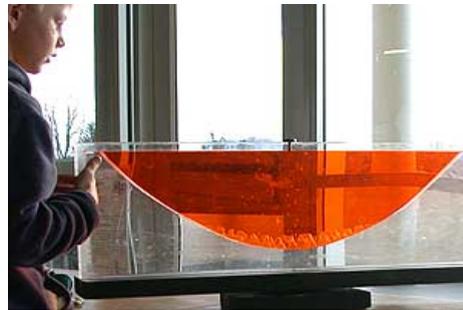
(c) Pallina da tennis che rimbalza



(d) Particelle luminose dei fuochi d'artificio



(e) Un'antenna parabolica riflette la radiazione che la raggiunge in un unico punto, detto *fuoco*



(f) Formazione di una superficie parabolica su un fluido in rotazione

Figura 29: Parabole in natura

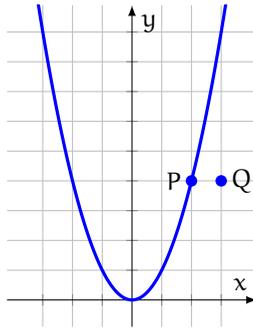


Figura 30: Appartenenza di un punto a una parabola

- Si trovano le coordinate del vertice  $V = (x_V, y_V)$ , dove  $x_V$  è dato dalla formula

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

e  $y_V$  si ottiene sostituendo il valore di  $x_V$  ottenuto nell'equazione della parabola. In alternativa, se la parabola interseca l'asse  $x$  nei punti  $x_1$  e  $x_2$ , l'ascissa del vertice è la loro media:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Si individuano graficamente i punti simmetrici, rispetto all'asse della parabola, di quelli precedentemente trovati.
- Si riportano i punti trovati nel piano cartesiano e si collegano con una curva continua.

**Esercizio 51.** Disegna la parabola  $y = x^2 - 4x + 3$ .

*Soluzione.*

- Troviamo il punto di intersezione della parabola con l'asse  $y$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $y$ , ovvero  $x = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sostituendo alla  $x$  nella prima equazione il valore 0 troviamo:

$$\begin{cases} y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, 3)$ .

- Troviamo le intersezioni con l'asse  $x$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $x$ , ovvero  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x - 1)(x - 3) = 0$$

ovvero

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $x$  nei punti  $(1, 0)$  e  $(3, 0)$ .

- L'ascissa del vertice è la media delle ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse  $x$ :

$$x_V = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

Calcoliamo l'ordinata del vertice sostituendo il valore trovato nell'equazione della parabola.

$$y_V = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

Quindi il vertice ha coordinate:

$$V = (2, -1)$$

- Il simmetrico del punto  $(0, 3)$  rispetto all'asse della parabola è il punto  $(4, 3)$ .

La figura 31a mostra il grafico della parabola. Una parabola come questa, che interseca l'asse  $x$  in due punti distinti, è detta *secante* l'asse  $x$ .  $\square$

**Esercizio 52.** Disegna la parabola  $y = x^2 - 6x + 9$ .

*Soluzione.*

- Troviamo il punto di intersezione della parabola con l'asse  $y$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $y$ , ovvero  $x = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sostituendo alla  $x$  nella prima equazione il valore 0 troviamo:

$$\begin{cases} y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, 9)$ .

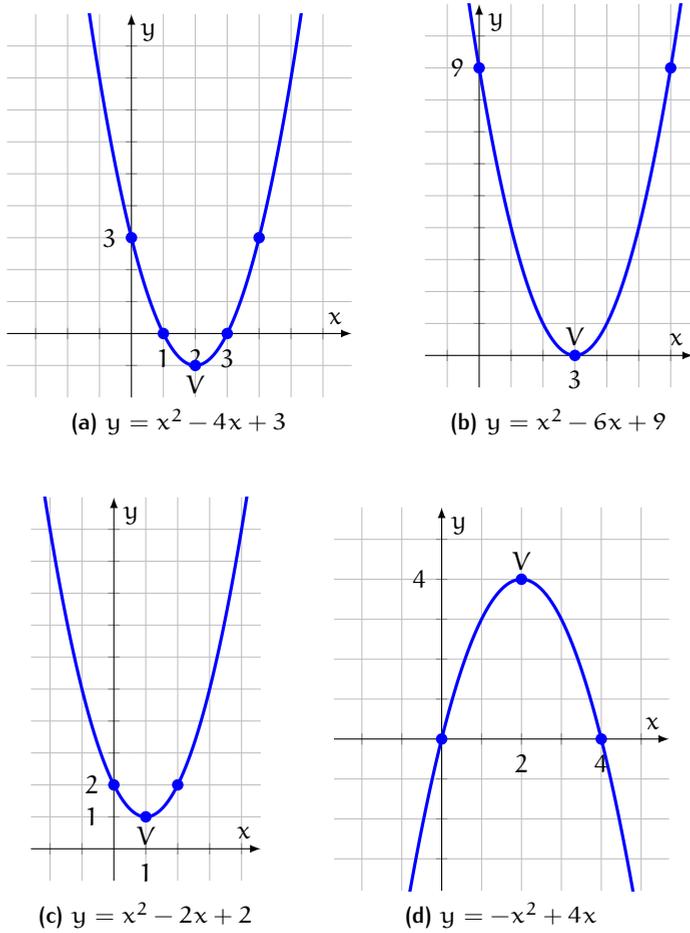


Figura 31: Disegno di parabole

- Troviamo le intersezioni con l'asse  $x$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $x$ , ovvero  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \implies (x - 3)^2 = 0 \implies x - 3 = 0 \implies x = 3$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $x$  nel punto  $(3, 0)$ .

- L'ascissa del vertice  $V$  è l'ascissa dell'unico punto di intersezione della parabola con l'asse  $x$ :

$$x_V = 3$$

Sostituiamo il valore trovato nell'equazione della parabola:

$$y_V = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$$

Quindi il vertice ha coordinate:

$$V = (3, 0)$$

- Il simmetrico del punto  $(0, 9)$  rispetto all'asse della parabola è il punto  $(6, 9)$ .

La figura 31b mostra il grafico della parabola. Una parabola come questa, che interseca l'asse  $x$  in un solo punto, è detta *tangente* l'asse  $x$ .  $\square$

**Esercizio 53.** Disegna la parabola  $y = x^2 - 2x + 2$ .

*Soluzione.*

- Troviamo il punto di intersezione della parabola con l'asse  $y$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $y$ , ovvero  $x = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sostituendo alla  $x$  nella prima equazione il valore 0 troviamo:

$$\begin{cases} y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, 2)$ .

- Troviamo le intersezioni con l'asse  $x$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $x$ , ovvero  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

che è impossibile, essendo  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ . Quindi la parabola non interseca mai l'asse  $x$ .

- Troviamo le coordinate del vertice  $V$  tenendo conto che:

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2$$

L'ascissa del vertice  $V$  è data dalla formula:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

Sostituiamo il valore trovato nell'equazione della parabola:

$$y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$$

Quindi il vertice ha coordinate:

$$V = (1, 1)$$

- Il simmetrico del punto  $(0, 2)$  rispetto all'asse della parabola è il punto  $(2, 2)$ .

La figura 31c mostra il grafico della parabola. Una parabola come questa, che interseca l'asse  $x$  in un solo punto, è detta *esterna* all'asse  $x$ .  $\square$

Di solito basta il vertice e un altro punto per disegnare la parabola. Tuttavia, se ne hai bisogno, puoi trovare altri punti per cui passa la parabola assegnando un valore a scelta a  $x$  e calcolando il valore corrispondente di  $y$ . La figura 32 mostra la parabola precedente disegnata per punti.

**Esercizio 54.** Disegna la parabola  $y = -x^2 + 4x$ .

*Soluzione.*

- Troviamo il punto di intersezione della parabola con l'asse  $y$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $y$ , ovvero  $x = 0$ :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x = 0 \end{cases}$$

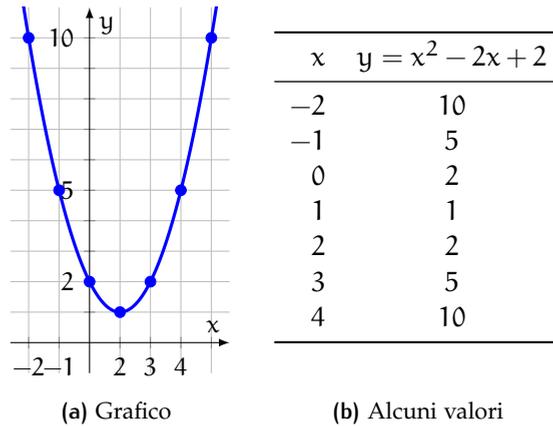


Figura 32: La parabola  $y = x^2 - 2x + 2$  disegnata per punti

Sostituendo alla  $x$  nella prima equazione il valore 0 troviamo:

$$\begin{cases} y = -0^2 + 4 \cdot 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $y$  nell'origine.

- Troviamo le intersezioni con l'asse  $x$ . Facciamo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $x$ , ovvero  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$-x^2 + 4x = 0 \implies -x(x - 4) = 0$$

che ha per soluzioni:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $x$  nell'origine e nel punto  $(4, 0)$ .

- L'ascissa del vertice  $V$  è data dalla formula:

$$x_V = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Sostituiamo il valore trovato nell'equazione della parabola:

$$y_V = -2^2 + 4 \cdot 2 = -4 + 8 = 4$$

Quindi il vertice ha coordinate:

$$V = (2, 4)$$

La figura 31d mostra il grafico della parabola. □

### 4.3 INTERSEZIONI TRA RETTA E PARABOLA

Le eventuali intersezioni tra una parabola e una retta si possono determinare risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni. Nel caso di retta non verticale:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Il sistema è di secondo grado e può avere:

- due soluzioni distinte: in questo caso la retta è *secante* la parabola;
- una sola soluzione: la retta è *tangente* alla parabola;
- nessuna soluzione: la retta è *esterna* alla parabola, ovvero non la incontra.

Nel caso particolare in cui la retta sia verticale c'è sempre un solo punto di intersezione. Infatti il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = k \end{cases}$$

ha sempre un'unica soluzione.

**Esercizio 55.** Trova i punti di intersezione tra la parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 3$  e la retta di equazione  $y = x - 1$ .

*Soluzione.* Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ha:

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \quad \implies \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \implies \quad (x - 1)(x - 4) = 0$$

da cui

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$$

Sostituendo i valori trovati alla  $x$  nella seconda equazione del sistema otteniamo

$$y = 1 - 1 = 0 \quad \vee \quad y = 4 - 1 = 3$$

Quindi le soluzioni del sistema sono  $(1, 0)$  e  $(4, 3)$ . Poiché il sistema ha due soluzioni, la parabola e la retta sono *secanti* e i loro punti di intersezione sono  $(1, 0)$  e  $(4, 3)$  (figura 33a).  $\square$

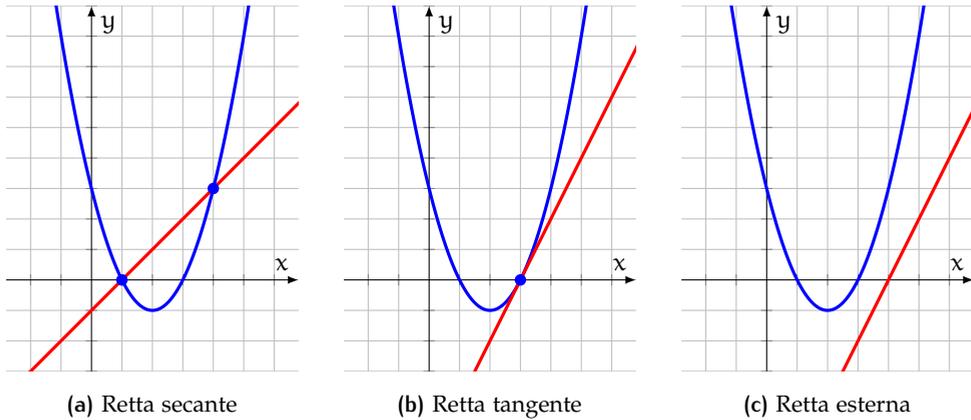


Figura 33: Intersezioni tra retta e parabola

**Esercizio 56.** Trova i punti di intersezione tra la parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 3$  e la retta di equazione  $y = 2x - 6$ .

*Soluzione.* Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ha:

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 6$$

da cui

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Sostituendo il valore trovato alla  $x$  nella seconda equazione del sistema otteniamo

$$y = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

Quindi la soluzione del sistema è  $(3, 0)$ . La retta è *tangente* alla parabola (figura 33b) e il loro punto di intersezione è  $(3, 0)$ .  $\square$

**Esercizio 57.** Trova i punti di intersezione tra la parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 3$  e la retta di equazione  $y = 2x - 8$ .

*Soluzione.* Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$$

Uguagliamo i secondi membri delle due equazioni:

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 8 \quad \implies \quad x^2 - 6x + 11 = 0$$

che è impossibile, perché  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -8 < 0$ , per cui il sistema non ha soluzioni. La retta è *esterna* alla parabola (figura 33c).  $\square$

## 4.4 ESERCIZI

# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

Traccia il grafico delle parabole aventi le seguenti equazioni.

1  $y = -2x^2$

2  $y = x^2 + x - 2$

3  $y = x^2 - 4x + 4$

4  $y = x^2 - 2x - 3$

5  $y = x^2 + x - 2$

6  $y = -x^2 + 4x$

7  $y = x^2 + x - 1$

8  $y = x^2 - x + 1$

9  $y = -3x^2 + 3$

10  $y = x^2 + 4x + 3$

11  $y = 2x^2 + 3x - 1$

12  $y = x^2 - 3x - 4$

13  $y = x^2 - 6x + 5$

14  $y = x^2 + 2x$

15  $y = x^2 + 2x + 1$

16  $y = x^2 + x + 1$

17  $y = 9 - 4x^2$

18  $y = 3x - 2x^2$

19  $y = 2x^2 + 1$

20  $y = x^2 - x - 2$

21  $y = -x^2 + 4x + 3$

22  $y = x^2 + 4x + 4$

23  $y = 4 - x^2$

24  $y = -x^2 + 6x - 9$

25  $y = -x^2 + 5x$

26  $y = 2x^2 + 8x$

27  $y = 2x^2 - 8x$

28 Vero o falso?

a. La parabola di equazione  $y = -x^2 + 2x$  passa per l'origine. V  Fb. La parabola di equazione  $y = x^2 - 4$  passa per l'origine. V  Fc. L'asse della parabola di equazione  $y = -2x^2 + 1$  è l'asse y. V  Fd. La parabola di equazione  $y = (\sqrt{3} - 2)x^2 + 1$  ha la concavità verso l'alto. V  Fe. La parabola di equazione  $y = -x^2 + 4x$  ha la concavità verso il basso. V  F

[3 affermazioni vere e 2 false]

29 Verifica analiticamente e graficamente che le rette

a.  $r: y = 2x - 3$

b.  $s: y = 2x + 1$

c.  $t: y = 3x - 4$

sono rispettivamente esterna, secante e tangente rispetto alla parabola  $y = x^2 - 3x + 5$ .30 Determina analiticamente e graficamente la posizione della retta  $r$  rispetto alla parabola  $\mathcal{P}$  nei seguenti casi:

a.  $r: y = \frac{x}{10}$

$\mathcal{P}: y = 4x^2 + 5x$

c.  $r: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$\mathcal{P}: y = \frac{1}{3}x^2 - x + 2$

b.  $r: y = 5x$

$\mathcal{P}: y = -x^2 - 10$

d.  $r: y = -x - 7$

$\mathcal{P}: y = -2x^2 + 3x + 1$

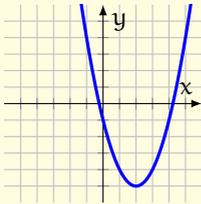
**31** Associa a ciascuna delle parabole seguenti la relativa equazione:

a.  $y = -x^2 + 4x - 1$

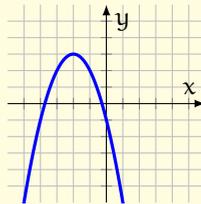
c.  $y = x^2 + 4x - 1$

b.  $y = -x^2 - 4x - 1$

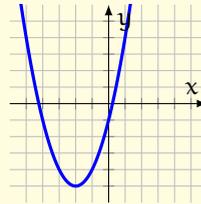
d.  $y = x^2 - 4x - 1$



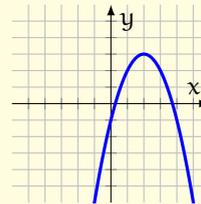
(a)



(b)

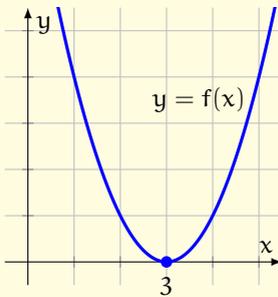


(c)

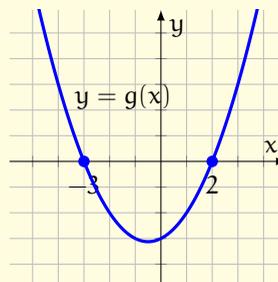


(d)

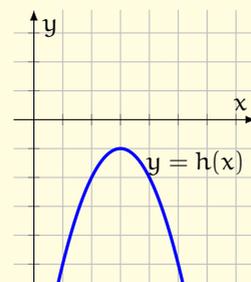
**32** La figura seguente riporta i grafici di tre parabole di equazione  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  e  $y = h(x)$ . Deduci, dai grafici, le eventuali soluzioni delle tre equazioni  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$  e  $h(x) = 0$ .



(a)  $f(x) = 0$

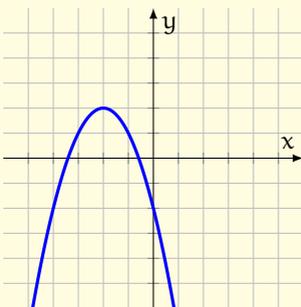


(b)  $g(x) = 0$

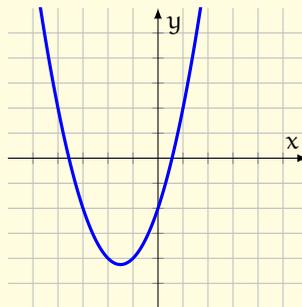


(c)  $h(x) = 0$

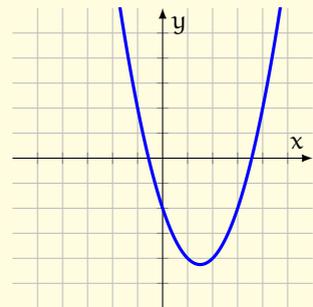
**33** Per ciascuna delle parabole rappresentate nella figura seguente, di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ , poni una crocetta sulle caselle che esprimono il segno dei coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



$a > 0$      $a = 0$      $a < 0$   
  $b > 0$      $b = 0$      $b < 0$   
  $c > 0$      $c = 0$      $c < 0$



$a > 0$      $a = 0$      $a < 0$   
  $b > 0$      $b = 0$      $b < 0$   
  $c > 0$      $c = 0$      $c < 0$



$a > 0$      $a = 0$      $a < 0$   
  $b > 0$      $b = 0$      $b < 0$   
  $c > 0$      $c = 0$      $c < 0$

**34** Risolvi il seguente esercizio.

a. Risolvi l'equazione  $x^2 - 4x = -x^2 + 2x$ .

- b. Traccia i grafici delle due parabole di equazioni  $y = x^2 - 4x$  e  $y = -x^2 + 2x$ .
- c. Interpreta graficamente l'equazione risolta algebricamente al punto a.

**35** Indica la risposta corretta.

- a. La parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 6$ :

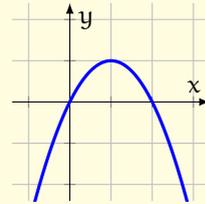
- A ha vertice nel punto  $(-2, 18)$        C passa per il punto  $(1, 2)$   
 B non interseca l'asse  $x$  in alcun punto       D ha come asse di simmetria l'asse  $y$

- b. La parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 4$ :

- A è tangente l'asse  $x$        C passa per il punto  $(-1, 1)$   
 B ha vertice nel punto  $(0, 2)$        D ha asse di simmetria  $x = 4$

- c. La figura seguente rappresenta una parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$ . Quale affermazione, tra le seguenti, è vera?

- A  $b = 0$  e  $c \neq 0$   
 B  $a > 0$  e  $c = 0$   
 C  $b > 0$  e  $c = 0$   
 D  $a < 0$  e  $b < 0$

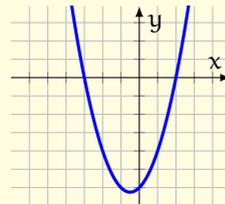


- d. Date le funzioni  $f(x) = 2x^2 - 3$  e  $g(x) = 3x^2 + 1$ , quanti zeri ha la funzione  $f(x) \cdot g(x)$ ?

- A nessuno       B due       C tre       D quattro

- e. Qual è l'equazione della parabola rappresentata nella figura seguente?

- A  $y = x^2 - x - 6$   
 B  $y = x^2 + x - 6$   
 C  $y = -x^2 + x - 6$   
 D  $y = -x^2 - x - 6$



- f. La tabella seguente mostra i valori assunti da  $b$  in corrispondenza di alcuni valori di  $a$ . Quale delle seguenti uguaglianze rappresenta una possibile relazione tra  $a$  e  $b$ ?

A  $b = 2a^2 - 1$

B  $b = 3a^2 - 1$

C  $b = a^2 + 2$

D  $b = 2a^2 + 1$

a	b
1	3
2	9
3	19

g. Data la parabola di equazione  $y = -x^2 + 6x - 5$ , quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A ha la concavità rivolta verso il basso       C l'asse di simmetria è  $x = k$ ,  $k > 0$

B non passa per l'origine       D non interseca l'asse  $x$  in alcun punto

[Una risposta A, tre B, una C e due D]



# 5

## MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Questo capitolo presenta due applicazioni della matematica in ambito economico: la risoluzione dei problemi di scelta e dei problemi di costi e ricavo.

### 5.1 PROBLEMI DI SCELTA

Si dicono *problemi di scelta* i problemi in cui viene chiesto di operare, fra varie alternative, la scelta più conveniente (secondo un determinato criterio, per esempio quello di massimizzare un profitto o minimizzare una spesa).

**Esercizio 58.** A un promotore di polizze assicurative vengono proposti due tipi di stipendio:

- contratto A: 1000 euro al mese più 50 euro per ogni polizza stipulata
- contratto B: 500 euro al mese più 100 euro per ogni polizza stipulata

Determina il contratto più conveniente.

*Soluzione.* È chiaro che non potrà esserci una scelta più conveniente “in assoluto”: la maggiore o minore convenienza di un contratto dipendono infatti dal numero di polizze stipulate dall'assicuratore. Ci proponiamo perciò di determinare qual è la scelta più conveniente a seconda del numero di polizze stipulate.

Costruiamo il modello matematico del problema. Indichiamo con  $x$  il numero (intero  $\geq 0$ ) di polizze stipulate in un mese e con  $y$  il corrispondente stipendio in euro:

- lo stipendio relativo al contratto A è espresso dalla funzione  $y = 50x + 1000$
- lo stipendio relativo al contratto B è espresso dalla funzione  $y = 100x + 500$

Tracciando i grafici delle due funzioni e confrontandoli, potremo stabilire qual è la scelta più conveniente.

Poiché le due funzioni sono lineari, i loro grafici sono delle rette. Per comodità tracciamo queste due rette come se  $x$  fosse una variabile reale (anche se i punti delle rette che rappresentano il problema sono in realtà solo quelli a coordinate intere, dato che il dominio di  $x$  è costituito dall'insieme degli interi  $\geq 0$ ). La figura [34a](#)

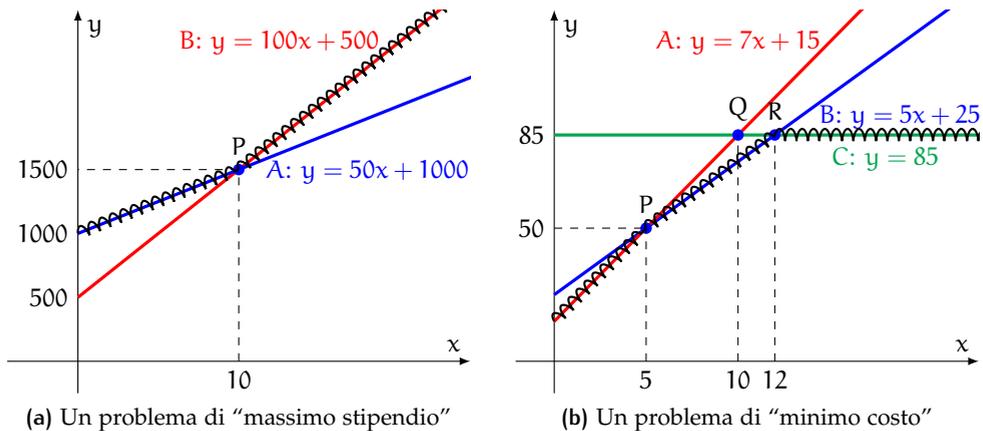


Figura 34: Problemi di scelta

riporta le rette grafico delle due funzioni, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.

Per risolvere il problema determiniamo le coordinate del punto d'intersezione  $P$  delle rette che abbiamo tracciato in figura. A tal fine risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 100x + 500 \\ y = 50x + 1000 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 100x + 500 = 50x + 1000 \\ y = 50x + 1000 \end{cases} \implies \begin{cases} 50x = 500 \\ y = 50x + 1000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10 \\ y = 1500 \end{cases}$$

Quindi il punto di intersezione è  $P(10, 1500)$ .

La linea di "massimo stipendio" è evidenziata in figura con un tratto ondulato: essa è costituita per  $x < 10$  dalla retta corrispondente al contratto A e per  $x > 10$  dalla retta corrispondente al contratto B. In conclusione:

- per un numero di polizze inferiore a 10 conviene il contratto A
- per un numero di polizze superiore a 10 conviene il contratto B
- per esattamente 10 polizze è indifferente il contratto A o B □

**Esercizio 59.** Paolo vuole frequentare una palestra per un mese e deve scegliere tra le seguenti tre proposte:

- palestra A: costo fisso d'iscrizione di 15 euro, più 7 euro per ogni ingresso
- palestra B: costo fisso d'iscrizione di 25 euro, più 5 euro per ogni

ingresso

- palestra C: abbonamento mensile di 85 euro, senza limiti di ingresso

Qual è la scelta più conveniente per Paolo?

*Soluzione.* Indichiamo con  $x$  il numero di ingressi alla palestra che Paolo intende effettuare in un mese e con  $y$  la corrispondente spesa in euro:  $x$  potrà variare nell'insieme dei numeri interi compresi tra 0 e 30. Abbiamo che:

- la spesa per frequentare la palestra A è espressa dalla funzione  $y = 7x + 15$
- la spesa per frequentare la palestra B è espressa dalla funzione  $y = 5x + 25$
- la spesa per frequentare la palestra C è espressa dalla funzione  $y = 85$

Tracciando i grafici delle tre funzioni e confrontandoli, potremo stabilire qual è la scelta più conveniente.

Poiché le tre funzioni sono lineari, i loro grafici sono delle rette. Come al solito, per comodità tracciamo queste tre rette come se  $x$  fosse una variabile reale (anche se i punti delle rette che rappresentano il problema sono in realtà solo quelli a coordinate intere, perché il dominio di  $x$  è costituito dai numeri interi compresi tra 0 e 30). La figura 34b riporta le rette grafico delle tre funzioni, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.

Determiniamo le coordinate di P (punto di intersezione tra le rette A e B), Q (intersezione tra A e C) e R (intersezione tra B e C), risolvendo i sistemi:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} y = 7x + 15 \\ y = 5x + 25 \end{cases} \implies \begin{cases} 7x + 15 = 5x + 25 \\ y = 5x + 25 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 50 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} y = 7x + 15 \\ y = 85 \end{cases} \implies \begin{cases} 7x + 15 = 85 \\ y = 85 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10 \\ y = 85 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} y = 5x + 25 \\ y = 85 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x + 25 = 85 \\ y = 85 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 85 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi i punti di intersezione sono P(5, 50), Q(10, 85) e R(12, 85).

La linea di "minimo costo" è quella evidenziata nella figura 34b con un tratto ondulato: essa è costituita per  $x < 5$  dalla retta corrispondente alla palestra A, per  $5 < x < 12$  dalla retta corrispondente alla palestra B e per  $x > 12$  dalla retta corrispondente alla palestra C. In conclusione:

- per un numero di ingressi inferiore a 5 conviene scegliere la palestra A
- per un numero di ingressi compreso tra 5 e 12 conviene scegliere la palestra B
- per un numero di ingressi superiore a 12 conviene scegliere la palestra C
- per esattamente 5 ingressi è indifferente scegliere la palestra A o la B
- per esattamente 12 ingressi è indifferente scegliere la palestra B o la C □

## 5.2 PROBLEMI DI COSTI E RICAVO

Nei *problemi di ottimizzazione* bisogna trovare la soluzione *ottimale* in base a un dato criterio (massimizzare un profitto o minimizzare un costo, per esempio), determinando il massimo o il minimo di una opportuna funzione.

Il *costo* di ogni bene prodotto o acquistato dipende dalla combinazione di molti fattori: il costo delle materie prime, della manodopera, dei macchinari, eccetera. I costi si dividono in due categorie.

**Definizione 11.** I *costi fissi* ( $C_F$ ) non variano al variare della quantità prodotta o acquistata; i *costi variabili* ( $C_V$ ), invece, variano al variare della quantità prodotta o acquistata.

Esempi di costi fissi sono le spese per l'affitto dei locali, lo stipendio dei dipendenti e le spese di assicurazione. Esempi di costi variabili sono le spese per l'acquisto delle materie prime, per la manutenzione degli impianti e per il consumo energetico.

**Definizione 12.** Il *costo totale* ( $C_T$ ) è la somma dei costi fissi e dei costi variabili:

$$C_T = C_F + C_V$$

**Definizione 13.** Il *ricavo* ( $R$ ) è il denaro che si trae dalla vendita di un prodotto. È dato dalla formula

$$R = p \cdot x$$

dove  $p$  è il prezzo di vendita di un singolo oggetto e  $x$  il numero di oggetti venduti.

**Definizione 14.** Il *profitto* (o *guadagno*) è l'utile realizzato dall'azienda. È dato dalla formula

$$P = R - C_T$$

e quindi si calcola sottraendo il costo totale dal ricavo.

Si può rappresentare graficamente l'andamento del profitto in funzione della quantità di beni venduti (*grafico del profitto*), oppure si possono rappresentare in uno stesso piano cartesiano l'andamento dei costi e del ricavo (*diagramma di redditività*). In questi grafici si possono individuare alcuni elementi essenziali:

- la *zona di perdita*, in cui il ricavo è minore del costo totale
- la *zona di utile*, in cui il ricavo è maggiore del costo totale

- il *punto di pareggio* (*Break Even Point*, in inglese, spesso denotato con BEP), che divide la zona di perdita dalla zona di utile, e che corrisponde al valore della quantità di beni venduti per cui ricavo e costo totale si equivalgono

**Esercizio 60.** Un commerciante acquista olio d'oliva al costo di 7 euro al litro e lo rivende a 12 euro al litro. Per il trasporto sostiene costi fissi giornalieri di 60 euro. Descrivi l'andamento del profitto giornaliero in funzione dei litri d'olio venduti.

*Soluzione.*

- Indichiamo con  $x$  i litri d'olio venduti in un giorno. Non ci sono vincoli tecnici: il commerciante può vendere tutto l'olio che i suoi clienti gli chiedono. L'unico vincolo cui è soggetto  $x$  è il "vincolo di segno":

$$x \geq 0$$

- I costi fissi (indipendenti dal numero di litri venduti) sono di 60 euro al giorno:

$$C_F = 60$$

- I costi variabili sono di 7 euro al litro per il numero  $x$  di litri venduti:

$$C_V = 7x$$

- Il costo totale è la somma dei costi fissi e dei costi variabili:

$$C_T = 7x + 60$$

- Il ricavo è di 12 euro al litro per il numero  $x$  di litri venduti:

$$R = 12x$$

- Il profitto è dato dal ricavo meno il costo totale:

$$P = R - C_T = 12x - (7x + 60) = 5x - 60$$

Poiché tutte le funzioni in gioco sono lineari, i loro grafici sono delle rette. Per tracciare il grafico della funzione profitto determiniamo le coordinate del punto d'intersezione del grafico con l'asse  $x$ , risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 5x - 60 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x - 60 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x = 60 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi il punto di intersezione è  $(12, 0)$ .

La figura 35a rappresenta il grafico della funzione profitto:

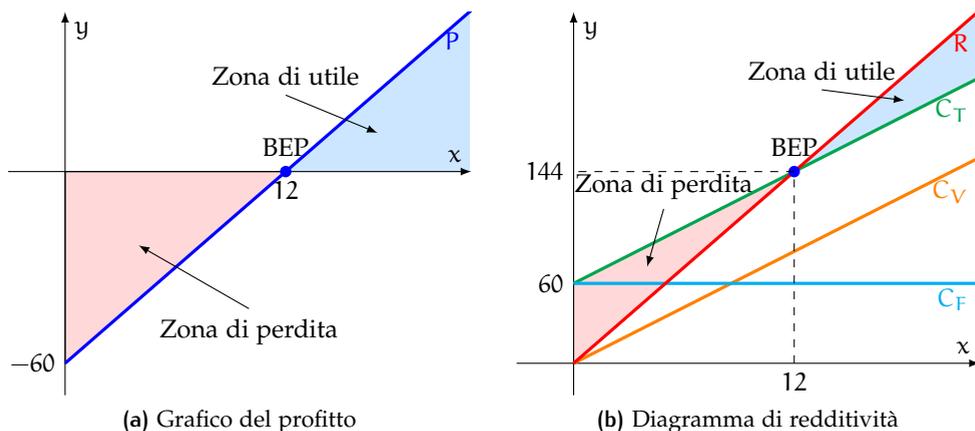


Figura 35: Un problema di ottimizzazione senza vincoli tecnici

- se vende meno di 12 litri d'olio, cioè se  $0 \leq x < 12$ , il commerciante è in perdita in quanto per tali valori la funzione profitto è negativa
- $x = 12$  è il punto di pareggio
- per tutti i valori superiori a 12 il commerciante ha un profitto positivo: quanto più grande è  $x > 12$ , tanto più grande è il profitto

In alternativa, il problema si può risolvere costruendo il diagramma di redditività. La figura 35b rappresenta le rette grafico delle funzioni  $C_F$ ,  $C_V$ ,  $C_T$  ed  $R$ . Per determinare il punto di pareggio troviamo il punto di intersezione tra la funzione che rappresenta il costo totale e la funzione che rappresenta il ricavo, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 7x + 60 \\ y = 12x \end{cases} \implies \begin{cases} 12x = 7x + 60 \\ y = 12x \end{cases} \implies \begin{cases} 5x = 60 \\ y = 12x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 144 \end{cases}$$

Il punto di pareggio si ha dunque per  $x = 12$ . Quindi:

- se  $0 \leq x < 12$  il commerciante è in perdita
- se  $x = 12$  il commerciante non ha né profitto né perdita
- se  $x > 12$  il commerciante ha un profitto positivo

Le conclusioni coincidono con quelle trovate in precedenza. □

**Esercizio 61.** Consideriamo il problema precedente, aggiungendo la condizione che il commerciante può trasportare al massimo 20 litri d'olio al giorno. Quanti litri d'olio deve vendere per avere il massimo profitto? Qual

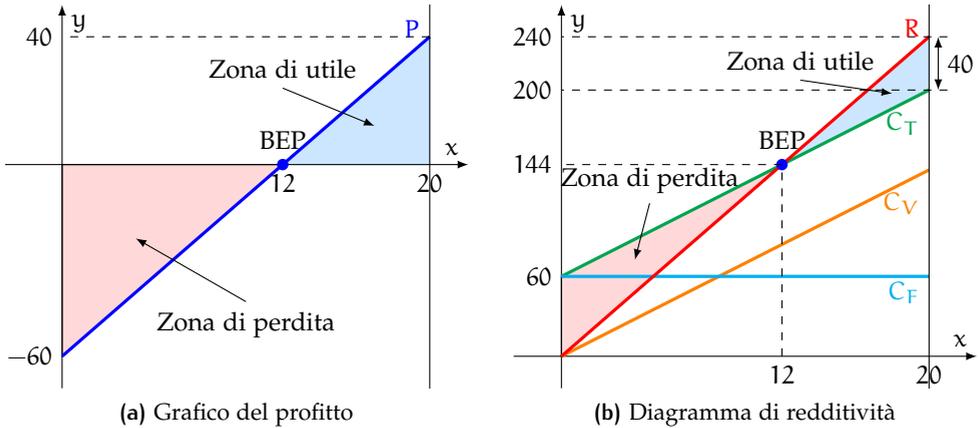


Figura 36: Un problema di ottimizzazione con un vincolo tecnico

è il massimo profitto? A quanti litri venduti si ha il punto di pareggio?

*Soluzione.* L'unica differenza rispetto all'esercizio precedente è la presenza del vincolo tecnico  $x \leq 20$ . Determiniamo il punto di intersezione del grafico della funzione profitto con la retta  $x = 20$ .

$$\begin{cases} y = 5x - 60 \\ x = 20 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 5 \cdot 20 - 60 \\ x = 20 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 40 \\ x = 20 \end{cases}$$

Quindi il punto di intersezione è  $(20, 40)$ .

La figura 36a rappresenta il grafico della funzione profitto. Abbiamo che:

- se vende meno di 12 litri d'olio, cioè se  $0 \leq x < 12$ , il commerciante è in perdita
- per  $x = 12$  il commerciante non ha né utile né perdita (*break even point*)
- per tutti i valori superiori a 12 fino al massimo trasportabile 20, cioè per  $12 < x \leq 20$ , il commerciante ha un profitto positivo
- il profitto è crescente e raggiunge il massimo, pari a 40 euro, in corrispondenza della quantità d'olio massima trasportabile, cioè per  $x = 20$

In alternativa, il problema si può risolvere costruendo il diagramma di redditività. La figura 36b rappresenta le rette grafico delle funzioni  $C_F$ ,  $C_V$ ,  $C_T$  ed  $R$ . Il massimo profitto si ha quando la differenza tra ricavo e costo è massima, ovvero per  $x = 20$ , per cui

$$R(20) - P(20) = 12 \cdot 20 - (7 \cdot 20 + 60) = 240 - 200 = 40$$

e l'analisi economica coincide con quella fatta in precedenza.  $\square$

**Esercizio 62.** Un lattaiolo acquista il latte sfuso a 0,6 euro al litro e lo rivende a 1,4 euro al litro. Ogni giorno spende 10 euro di trasporto e il recipiente in cui tiene il latte ha capienza massima di 30 litri. I litri invenduti non rappresentano un costo perché il lattaiolo può renderli al suo fornitore. Quanti litri di latte deve vendere per avere il massimo guadagno? Qual è il massimo guadagno? A quanti litri venduti si ha il punto di pareggio?

*Soluzione.*

- Indichiamo con  $x$  i litri venduti in un giorno. Acquistando e vendendo il latte sfuso,  $x$  può non essere intero. Oltre al vincolo di segno  $x \geq 0$  c'è il vincolo tecnico dovuto alla capienza del recipiente, pari a 30 litri. Quindi:

$$0 \leq x \leq 30$$

- I costi fissi (indipendenti dal numero di litri venduti) sono di 10 euro al giorno:

$$C_F = 10$$

- I costi variabili sono di 0,6 euro al litro per il numero  $x$  di litri venduti:

$$C_V = 0,6x$$

- Il costo totale è la somma dei costi fissi e dei costi variabili:

$$C_T = 0,6x + 10$$

- Il ricavo è di 1,4 euro al litro per il numero  $x$  di litri venduti:

$$R = 1,4x$$

- Il profitto è dato dal ricavo meno il costo totale:

$$P = R - C_T = 1,4x - (0,6x + 10) = 0,8x - 10$$

Poiché tutte le funzioni in gioco sono lineari, i loro grafici sono delle rette. Per tracciare il grafico della funzione profitto determiniamo le coordinate del punto d'intersezione del grafico con l'asse  $x$ . A tal fine risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 0,8x - 10 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,8x - 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,8x = 10 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12,5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi il punto di intersezione è  $(12,5, 0)$ . Determiniamo inoltre il punto di intersezione del grafico con la retta  $x = 30$ .

$$\begin{cases} y = 0,8x - 10 \\ x = 30 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0,8 \cdot 30 - 10 \\ x = 30 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 14 \\ x = 30 \end{cases}$$

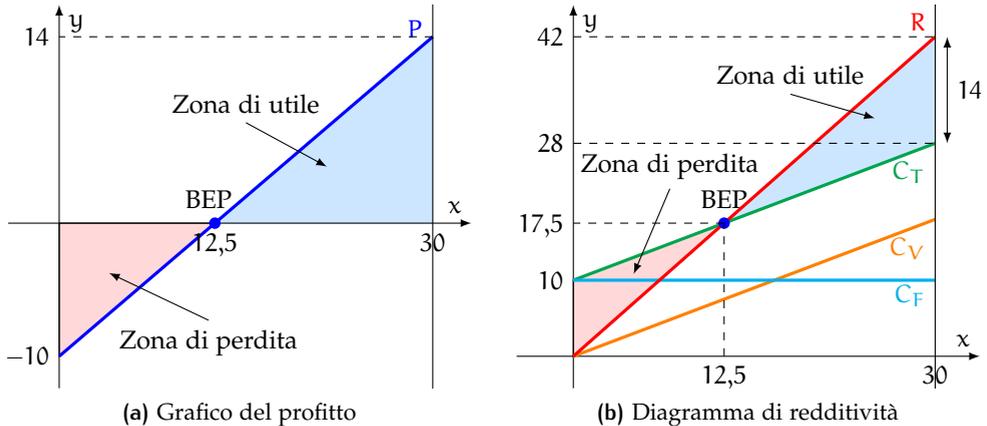


Figura 37: Un altro problema di ottimizzazione con vincolo tecnico

Quindi il punto di intersezione è  $(30, 14)$ .

La figura 37a descrive il grafico della funzione profitto. Possiamo dire che il lattaio:

- è in perdita se vende meno di 12,5 litri
- è in pareggio se vende esattamente 12,5 litri (*break even point*)
- realizza un guadagno se vende più di 12,5 litri
- realizza il massimo guadagno (14 euro) se vende tutti e 30 i litri di latte

In alternativa, il problema si può risolvere costruendo il diagramma di redditività. La figura 37b rappresenta le rette grafico delle funzioni  $C_F$ ,  $C_V$ ,  $C_T$  ed  $R$ . Per trovare il *break even point* troviamo il punto di intersezione tra la funzione che rappresenta il costo totale e la funzione che rappresenta il ricavo, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 0,6x + 10 \\ y = 1,4x \end{cases} \implies \begin{cases} 1,4x = 0,6x + 10 \\ y = 1,4x \end{cases} \implies \begin{cases} 0,8x = 10 \\ y = 1,4x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12,5 \\ y = 17,5 \end{cases}$$

Il *break even point* si ha dunque per  $x = 12,5$ . Il massimo profitto si ha quando la differenza tra ricavo e costo è massima, ovvero per  $x = 30$ , per cui

$$R(30) - P(30) = 1,4 \cdot 30 - (0,6 \cdot 30 + 10) = 42 - 28 = 14$$

e l'analisi economica coincide con quella fatta in precedenza.  $\square$

**Esercizio 63.** Un'azienda agricola produce vino di pregio. Ci sono costi fissi mensili di 5000 euro, più 40 euro per ogni bottiglia di vino prodotto.

L'azienda sostiene inoltre delle spese di vendita pari in euro al 10% del quadrato del numero di bottiglie vendute. Ogni bottiglia viene venduta a 100 euro. Descrivi l'andamento del profitto mensile in funzione delle bottiglie vendute.

*Soluzione.* Indichiamo con  $x$  il numero di bottiglie di vino vendute in un mese. L'unico vincolo cui è soggetto  $x$  è il "vincolo di segno" (in alte parole, non ci sono vincoli tecnici):

$$x \geq 0$$

La situazione è allora la seguente.

- I costi fissi (indipendenti dal numero di bottiglie vendute) sono di 5000 euro al mese:

$$C_F = 5000$$

- Le spese di vendita sono in euro pari al 10% del quadrato del numero di bottiglie vendute:

$$\frac{10}{100}x^2 = 0,1x^2$$

- I costi variabili sono di 40 euro per ogni bottiglia venduta più le spese di vendita:

$$C_V = 40x + 0,1x^2$$

- Il costo totale è la somma dei costi fissi e dei costi variabili:

$$C_T = C_F + C_V = 5000 + 40x + 0,1x^2$$

- Il ricavo è di 100 euro per il numero  $x$  di bottiglie vendute:

$$R = 100x$$

- Il profitto è dato dal ricavo meno il costo totale:

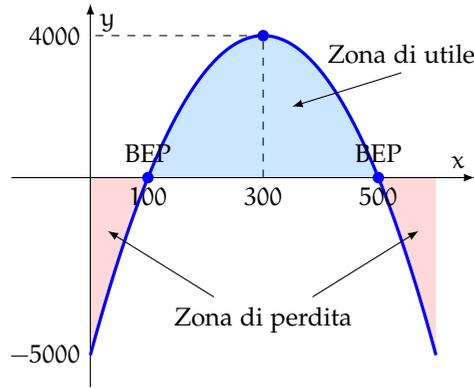
$$P = R - C_T = 100x - (5000 + 40x + 0,1x^2) = -0,1x^2 + 60x - 5000$$

Quest'ultima è la funzione da massimizzare. Dal punto di vista della geometria analitica il grafico della funzione è una parabola; inoltre, essendo il coefficiente di  $x^2$  negativo, questa parabola ha la concavità rivolta verso il basso. Tracciamo il grafico della parabola.

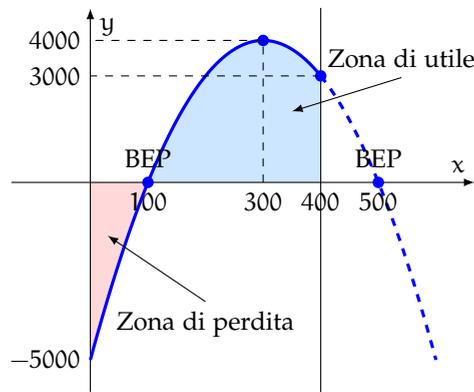
- Troviamo il punto di intersezione della parabola con l'asse  $y$  risolvendo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $y$ , ovvero  $x = 0$ :

$$\begin{cases} y = -0,1x^2 + 60x - 5000 \\ x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -5000 \\ x = 0 \end{cases}$$

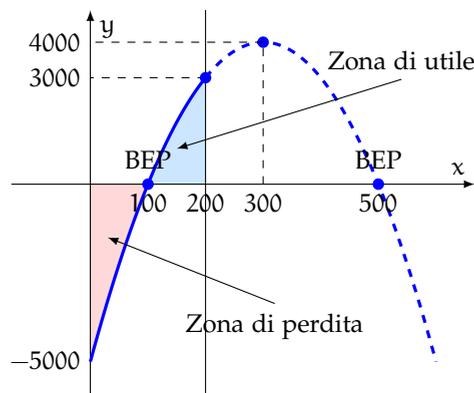
Quindi la parabola interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, -5000)$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 38: Un problema di ottimizzazione di secondo grado

- Troviamo le intersezioni con l'asse  $x$  risolvendo il sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse  $x$ , ovvero  $y = 0$ :

$$\begin{cases} y = -0,1x^2 + 60x - 5000 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$-0,1x^2 + 60x - 5000 = 0 \implies x^2 - 600x + 50\,000 = 0 \implies (x - 100)(x - 500) = 0$$

ovvero

$$x = 100 \quad \vee \quad x = 500$$

Quindi la parabola interseca l'asse  $x$  nei punti  $(100, 0)$  e  $(500, 0)$ , ciascuno dei quali è un punto di pareggio.

- L'ascissa del vertice  $V$  è la media delle ascisse delle intersezioni con l'asse  $x$ :

$$x_V = \frac{100 + 500}{2} = 300$$

Sostituiamo il valore trovato nell'equazione della parabola:

$$y_V = -0,1(300)^2 + 60 \cdot 300 - 5000 = -9000 + 18\,000 - 5000 = 4000$$

Quindi:

$$V = (300, 4000)$$

La figura 38a rappresenta la situazione. La funzione cresce fra 0 e 300; a 300 raggiunge il valore massimo (che corrisponde al massimo profitto per l'azienda) e poi decresce. Possiamo quindi concludere che l'azienda:

- se non vende alcuna bottiglia di vino, è in perdita di 5000 euro
- se vende meno di 100 bottiglie, è in perdita
- se vende 100 bottiglie, è in pareggio
- se vende un numero di bottiglie compreso tra 100 e 500, guadagna; in particolare, ha il massimo profitto vendendo 300 bottiglie, guadagnando 4000 euro
- se vende 500 bottiglie, è in pareggio
- se vende più di 500 bottiglie è in perdita

In questo caso alla ditta non conviene produrre più di 300 bottiglie. □

**Esercizio 64.** Consideriamo il problema precedente, aggiungendo la condizione che l'azienda non può produrre più di 400 bottiglie al mese.

*Soluzione.* L'unica differenza rispetto all'esercizio precedente è la presenza del vincolo tecnico  $x \leq 400$ . La figura 38b evidenzia questo vincolo. Rispetto al caso precedente, la situazione non cambia di molto. Infatti l'azienda:

- se non vende alcuna bottiglia di vino, è in perdita di 5000 euro
- se vende meno di 100 bottiglie, è in perdita
- se vende 100 bottiglie, è in pareggio
- se vende un numero di bottiglie compreso tra 100 e 400, guadagna; in particolare, realizza il massimo profitto vendendo 300 bottiglie, guadagnando 4000 euro
- se vende 400 bottiglie (massimo valore di produzione), guadagna 3000 euro (valore ottenuto sostituendo 400 alla  $x$  nell'equazione della parabola)

L'analisi si ferma a 400 litri per la presenza del vincolo di produzione. Questo vincolo non provoca però cambiamenti significativi perché, come abbiamo già osservato, alla ditta non conviene produrre più di 300 bottiglie di vino al mese.  $\square$

**Esercizio 65.** Consideriamo ancora il problema 63 dell'azienda vinicola, aggiungendo la condizione che l'azienda non può produrre più di 200 bottiglie al mese.

*Soluzione.* La figura 38c mostra il nuovo vincolo tecnico  $x \leq 200$ . In questo caso l'azienda:

- se non vende alcuna bottiglia di vino, è in perdita di 5000 euro
- se vende meno di 100 bottiglie, è in perdita
- se vende 100 bottiglie, è in pareggio
- se vende un numero di bottiglie compreso tra 100 e 200, guadagna; in particolare, realizza il massimo profitto vendendo 200 bottiglie, guadagnando 3000 euro (valore ottenuto sostituendo 200 alla  $x$  nell'equazione della parabola)

Questa volta il vincolo tecnico cambia notevolmente l'analisi economica: infatti, non potendo raggiungere la produzione ideale di 300 bottiglie al mese, il massimo profitto si ottiene producendo il maggior numero di bottiglie consentite.  $\square$

## 5.3 ESERCIZI

# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

## Problemi di scelta

**1** Per il noleggio di un'auto due diverse ditte offrono le seguenti condizioni:

- la ditta A applica 20 euro di costo fisso più 50 euro per ogni giorno di noleggio
- la ditta B non applica alcun costo fisso e richiede 60 euro per ogni giorno di noleggio

Stabilisci, in dipendenza del numero di giorni per cui si vuole noleggiare l'auto, qual è la scelta più conveniente.

[Per un solo giorno di noleggio conviene la ditta B, per più di due giorni conviene la ditta A, per due giorni è indifferente]

**2** Per produrre un certo prodotto un'azienda può usare due macchinari diversi, che chiamiamo A e B. Il macchinario A richiede 20 minuti di preparazione e produce tre oggetti al minuto; il macchinario B richiede 10 minuti di preparazione e produce due oggetti al minuto. Determina, in dipendenza del numero di oggetti che si vogliono produrre, quale macchinario consente di impiegare meno tempo.

[Volendo produrre meno di 60 oggetti è più conveniente scegliere B; per più di 60 oggetti è più conveniente A; per 60 oggetti è indifferente]

**3** Una fabbrica deve scegliere se produrre:

- un tessuto A che richiede costi fissi giornalieri di 1000 euro e fornisce un ricavo di 10 euro per metro di tessuto
- oppure un tessuto B che richiede costi fissi giornalieri di 2000 euro e fornisce un ricavo di 15 euro per metro di tessuto

Determina, al variare dei metri di tessuto che la fabbrica intende produrre giornalmente, la produzione più conveniente.

[Volendo produrre meno di 200 metri di tessuto al giorno conviene produrre il tessuto del tipo A; volendo produrre più di 200 metri di tessuto conviene produrre il tessuto B; per 200 metri la scelta è indifferente]

**4** Per il trasporto di una certa merce due ditte applicano le seguenti condizioni:

- la ditta A applica una spesa fissa di 100 euro più 10 euro per ogni quintale di merce trasportata
- la ditta B non applica nessuna spesa fissa e chiede 12 euro per ogni quintale di merce trasportata

Stabilisci, in dipendenza del numero di quintali di merce che si vogliono trasportare, la scelta più conveniente.

[Fino a 50 quintali conviene la ditta B; per più di 50 quintali conviene la ditta A; per 50 quintali è indifferente]

**5** Una banca propone tre diverse forme di investimento:

- un rendimento annuo netto del 4% diminuito di 100 euro per le spese di gestione
- un rendimento annuo netto del 5% diminuito di 200 euro per le spese di gestione
- un rendimento annuo netto del 6% diminuito di 300 euro per le spese di gestione

Determina, in dipendenza del capitale investito, qual è la forma di investimento più conveniente.

[Per capitali fino a 10 000 euro conviene il primo investimento; per capitali oltre i 10 000 euro il terzo, per un capitale di 10 000 euro è indifferente scegliere la prima, la seconda o la terza forma di investimento]

**6** Tre differenti aziende telefoniche applicano le seguenti tariffe:

- l'azienda A applica un costo fisso di 25 centesimi per ogni telefonata più 25 centesimi per ogni minuto di conversazione;
- l'azienda B applica un costo fisso di 40 centesimi per ogni telefonata più 20 centesimi per ogni minuto di conversazione;
- l'azienda C applica la tariffa di 30 centesimi per minuto di conversazione, senza costi fissi.

Stabilisci, in dipendenza della durata di una telefonata, quale scelta è la più conveniente.

[Fino a 4 minuti di conversazione è più conveniente C; oltre i 4 minuti conviene B; per 4 minuti è indifferente B o C]

**7** Un ricco signore vuole ormeggiare durante la stagione estiva il suo panfilo per un certo periodo di tempo in un porticciolo gestito da un club nautico. Ha le seguenti possibilità:

- prendere in affitto il posto barca per l'intera stagione estiva (dal primo giugno al 30 settembre), pagando 3600 euro
- pagare la tariffa di ormeggio di 200 euro al giorno
- iscriversi al club, pagando una quota di iscrizione di 800 euro, quindi pagare la tariffa di ormeggio agevolata, di 40 euro al giorno

Stabilisci qual è la scelta più conveniente, in relazione al numero dei giorni di ormeggio.

[Per meno di 5 giorni conviene pagare la tariffa di ormeggio; per ormeggio tra i 5 e i 70 giorni conviene iscriversi al club; per più di 70 giorni di ormeggio conviene affittare per l'intera stagione; per 5 giorni è indifferente pagare la tariffa di ormeggio o iscriversi al club; per 70 giorni è indifferente iscriversi al club o affittare per l'intera stagione]

**8** A un rappresentante di televisori vengono proposte tre diverse forme di retribuzione:

- la prima prevede 600 euro al mese, più 40 euro per ogni televisore venduto
- la seconda prevede 400 euro al mese, più 80 euro per ogni televisore venduto
- la terza non prevede nessuno stipendio fisso, ma 100 euro per ogni televisore venduto

Stabilisci qual è la forma di retribuzione più conveniente, in relazione al numero di televisori venduti in un mese.

[Per meno di 5 televisori venduti in un mese conviene la prima forma di retribuzione; per vendite tra i 5 e i 20 televisori conviene la seconda; per vendite superiori ai 20 televisori la terza; per 5 televisori è indifferente la prima o la seconda; per 20 televisori è indifferente la seconda o la terza]

**9** Per fabbricare dei bulloni un'azienda può usare tre macchinari diversi, che chiamiamo A, B e C:

- il macchinario A richiede 10 minuti di preparazione e produce 4 bulloni al minuto
- il macchinario B richiede 15 minuti di preparazione e produce 6 bulloni al minuto
- il macchinario C richiede 30 minuti di preparazione e produce 10 bulloni al minuto

Determina, in dipendenza del numero di bulloni che si vogliono produrre, quale macchinario consente di impiegare il minimo tempo complessivo (intendendo come tempo complessivo la somma del tempo di preparazione e di quello di produzione).

[Per meno di 60 bulloni conviene A, per una produzione tra i 60 e i 225 bulloni conviene B; per più di 225 bulloni conviene C, per 60 bulloni è indifferente A o B; per 225 bulloni è indifferente B o C]

**10** A un assicuratore vengono offerte tre diverse forme di contratto:

- 1000 euro al mese più 100 euro per ogni polizza stipulata in quel mese
- 1200 euro al mese più 75 euro per ogni polizza stipulata in quel mese
- 1500 euro, indipendentemente dal numero di polizze stipulate

Stabilisci, in dipendenza del numero di polizze che l'assicuratore stipula in un mese, il contratto più conveniente.

[Per meno di 4 polizze conviene C, per 4 polizze è indifferente B o C, per 5, 6 o 7 polizze conviene B, per 8 polizze è indifferente A o B, per più di 8 polizze conviene A]

### Problemi di costi e ricavo

**11** Una fabbrica che produce e vende magliette a 10 € l'una sostiene costi fissi mensili di 9000 € e costi variabili pari a 4 € per ogni maglietta prodotta. Determina il punto di pareggio e la zona di utile.

[Il punto di pareggio si ha per 1500 magliette vendute. La zona di utile è  $x > 1500$ , dove  $x$  è il numero di magliette vendute.]

**12** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 4000 magliette al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 4000 magliette vendute ed è 15 000 €. La zona di utile è  $1500 < x \leq 4000$ , dove  $x$  è il numero di magliette vendute.]

**13** Una fabbrica che produce e vende televisori a 1000 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 200 000 € e costi variabili pari a 500 € per ogni televisore venduto. Determina il punto di pareggio e la zona di utile.

[Il punto di pareggio si ha per 400 televisori venduti. La zona di utile è  $x > 400$ , dove  $x$  è il numero di televisori venduti.]

**14** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 1000 televisori al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 1000 televisori venduti ed è 300 000 €. La zona di utile è  $400 < x \leq 1000$ , dove  $x$  è il numero di televisori venduti.]

**15** Una fabbrica che produce e vende caramelle a 1 € al pacchetto sostiene costi fissi mensili di 6000 € e costi variabili pari a 0,70 € per ogni pacchetto venduto. Determina il punto di pareggio e la zona di utile.

[Il punto di pareggio si ha per 20 000 pacchetti di caramelle venduti. La zona di utile è  $x > 20 000$ , dove  $x$  è il numero di pacchetti di caramelle venduti.]

**16** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 50 000 pacchetti di caramelle al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 50 000 pacchetti di caramelle venduti ed è 9 000 €. La zona di utile è  $20 000 < x \leq 50 000$ , dove  $x$  è il numero di pacchetti di caramelle venduti.]

**17** Una segheria che produce e vende truciolo a 100 € al quintale sostiene costi fissi mensili di 2750 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 40 € per ogni quintale prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, al 10% del quadrato del numero di quintali venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 300 quintali venduti ed è 6250 €. La zona di utile è  $50 < x < 550$ , dove  $x$  è il numero dei quintali venduti.]

**18** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la segheria possa produrre al massimo 400 quintali al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 300 quintali venduti ed è 6250 €. La zona di utile è  $50 < x \leq 400$ .]

**19** Consideriamo l'esercizio 17, aggiungendo la condizione che la segheria possa produrre al massimo 200 quintali al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 200 quintali venduti ed è 5250 €. La zona di utile è  $50 < x \leq 200$ .]

**20** Una fabbrica che produce e vende borse a 120 € l'una sostiene costi fissi mensili di 7000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 40 € per ogni borsa prodotta e costi di vendita mensili pari, in euro, al 10% del quadrato del numero di borse vendute. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 400 borse vendute ed è 9000 €. La zona di utile è  $100 < x < 700$ , dove  $x$  è il numero di borse vendute.]

**21** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 500 borse al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 400 borse vendute ed è 9000 €. La zona di utile è  $100 < x \leq 500$ , dove  $x$  è il numero di borse vendute.]

**22** Consideriamo l'esercizio 20, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 200 borse al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 200 borse vendute ed è 5000 €. La zona di utile è  $100 < x \leq 200$ , dove  $x$  è il numero di borse vendute.]

**23** Una fabbrica che produce e vende scarpe a 100 € al paio sostiene costi fissi mensili di 60 000 € e costi variabili pari a 50 € per ogni paio di scarpe venduto. La fabbrica può produrre al massimo 4000 paia di scarpe al mese. Determina il punto di pareggio, la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il punto di pareggio si ha per 1200 paia di scarpe vendute. Il massimo profitto si ha per 4000 paia di scarpe vendute ed è 140 000 €. La zona di utile è  $1200 < x \leq 4000$ , dove  $x$  è il numero di paia di scarpe vendute.]

**24** Una fabbrica che produce e vende jeans a 80 € al paio sostiene costi fissi mensili di 30 000 € e costi variabili pari a 30 € per ogni paio di jeans venduto. La fabbrica può produrre al massimo 2000 paia di jeans al mese. Determina il punto di pareggio, la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il punto di pareggio si ha per 600 paia di jeans venduti. Il massimo profitto si ha per 2000 paia di jeans venduti ed è 70 000 €. La zona di utile è  $600 < x \leq 2000$ , dove  $x$  è il numero di paia di jeans venduti.]

**25** Una fabbrica che produce e vende orologi a 200 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 20 000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 80 € per ogni orologio prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, al 10% del quadrato del numero di orologi venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 600 orologi venduti ed è 16 000 €. La zona di utile è  $200 < x < 1000$ , dove  $x$  è il numero di orologi venduti.]

**26** Una fabbrica che produce e vende telefoni cellulari a 400 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 75 000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 200 € per ogni cellulare prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, al 10% del quadrato del numero di cellulari venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 1000 cellulari venduti ed è 25 000 €. La zona di utile è  $500 < x < 1500$ , dove  $x$  è il numero di cellulari venduti.]

**27** Una fabbrica che produce e vende caschi da moto a 300 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 32 000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 100 € per ogni casco prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, al 20% del quadrato del numero di caschi venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 500 caschi venduti ed è 18 000 €. La zona di utile è  $200 < x < 800$ , dove  $x$  è il numero di caschi venduti.]

**28** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la fabbrica possa produrre al massimo 600 caschi al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 500 caschi venduti ed è 18 000 €. La zona di utile è  $200 < x \leq 600$ , dove  $x$  è il numero di caschi venduti.]

**29** Una fabbrica che produce e vende contenitori speciali a 200 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 10 000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 80 € per ogni contenitore prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, al 20% del quadrato del numero di contenitori venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 300 contenitori venduti ed è 8000 €. La zona di utile è  $100 < x < 500$ , dove  $x$  è il numero di contenitori venduti.]

**30** Una fabbrica che produce e vende camicie a 90 € l'una sostiene costi fissi mensili di 2625 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 30 € per ogni camicia prodotta e costi di vendita mensili pari, in euro, al 15% del quadrato del numero di camicie vendute. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 200 camicie vendute ed è 3375 €. La zona di utile è  $50 < x < 350$ , dove  $x$  è il numero di camicie vendute.]

**31** Una fabbrica che produce e vende zaini a 60 € l'uno sostiene costi fissi mensili di 30 000 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 20 € per ogni zaino prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, all'1% del quadrato del numero di zaini venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 2000 zaini venduti ed è 10 000 €. La zona di utile è  $1000 < x < 3000$ , dove  $x$  è il numero di zaini venduti.]

**32** Una distilleria che produce e vende liquore a 40 € al litro sostiene costi fissi mensili di 11 500 € e costi variabili ripartiti in costi di produzione pari a 12 € per ogni litro di liquore prodotto e costi di vendita mensili pari, in euro, all'1% del quadrato del numero di litri di liquore venduti. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 1400 litri di liquore venduti ed è 8100 €. La zona di utile è  $500 < x < 2300$ , dove  $x$  è il numero di litri di liquore venduti.]

**33** Consideriamo l'esercizio precedente, aggiungendo la condizione che la distilleria possa produrre al massimo 1000 litri di liquore al mese. Determina la produzione che permette il massimo profitto, il relativo valore e la zona di utile.

[Il massimo profitto si ha per 1000 litri di liquore venduti ed è 6500 €. La zona di utile è  $500 < x \leq 1000$ , dove  $x$  è il numero di litri di liquore venduti.]

**34** Alcune famiglie affittano una residenza estiva da 65 posti per risparmiare sulla vacanza. Pagano 90 € a testa per una settimana, più 2 € a testa per ogni posto che rimane vuoto. Quanti posti devono rimanere vuoti perché il proprietario della residenza ottenga il massimo ricavo?

*Soluzione.* Se  $x$  è il numero di posti occupati (e quindi  $65 - x$  è il numero di posti vuoti) e  $y$  il ricavo del proprietario, si ha che

$$y = 90x + 2x(65 - x) = 90x + 130x - 2x^2 = -2x^2 + 220x$$

Il valore di  $x$  che rende massimo il ricavo del proprietario è l'ascissa del vertice  $V$  della parabola definita dall'equazione precedente:

$$x_V = \frac{0 + 110}{2} = 55$$

Quindi i posti che devono rimanere vuoti sono  $65 - 55 = 10$ . □

# 6

## PROVE INVALSI

Le prove Invalsi (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema di Istruzione e formazione), che nelle scuole superiori coinvolgono le classi seconde e quinte, valutano l'apprendimento degli studenti italiani. Questo capitolo, rivolto alle classi terze, contiene esercizi di preparazione alle prove Invalsi di matematica.

### 6.1 ALGEBRA

**Esercizio 66.** Il libro di matematica che l'anno scorso costava 24 euro, quest'anno costa 27 euro. Qual è stato l'aumento percentuale del prezzo del libro?

A 3%

B 12,5%

C 17,5%

D 30%



*Soluzione.*

$$\frac{27 - 24}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 12,5\%$$

La risposta esatta è la B. □

**Esercizio 67.** Quale valore di  $x$  verifica l'equazione  $3(2x-1) + 2x = 21$ ?

A -3

B -11/4

C 11/4

D 3

*Soluzione.*

$$3(2x-1) + 2x = 21 \implies 6x - 3 + 2x = 21 \implies 8x = 24 \implies x = 3$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 68.** In una scuola ci sono 100 studenti. Tutti studiano almeno una lingua straniera: 50 studiano l'inglese, 40 il francese e 40 lo spagnolo; otto studiano solo l'inglese e il francese, sei solo l'inglese e lo spagnolo, e quattro solo il francese e lo spagnolo. Quanti studenti studiano tutte e tre le lingue?

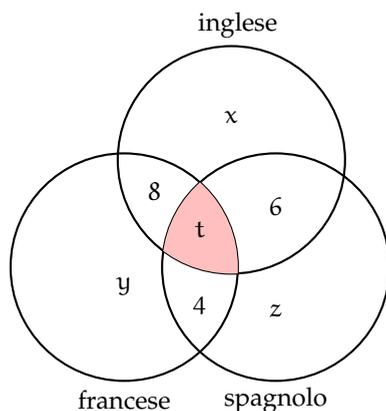
A 4

B 6

C 8

D 10

*Soluzione.* Siano  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente il numero di alunni che studiano solo l'inglese, il francese e lo spagnolo, e  $t$  il numero di alunni che studiano tutte e tre le lingue. Il grafico seguente schematizza la situazione.



Le prime tre equazioni del seguente sistema esprimono la composizione degli alunni che studiano rispettivamente l'inglese, il francese e lo spagnolo; l'ultima equazione descrive la composizione complessiva della scuola.

$$\begin{cases} x + 8 + 6 + t = 50 \\ y + 4 + 8 + t = 40 \\ z + 6 + 4 + t = 40 \\ x + y + z + 6 + 8 + 4 + t = 100 \end{cases}$$

Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + t = 36 \\ y + t = 28 \\ z + t = 30 \\ x + y + z + t = 82 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 36 - t \\ y = 28 - t \\ z = 30 - t \\ x + y + z + t = 82 \end{cases}$$

da cui, sostituendo nell'ultima equazione le espressioni di  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$(36 - t) + (28 - t) + (30 - t) + t = 82 \implies t = 6$$

La risposta esatta è la B.

□

**Esercizio 69.** A una conferenza sono presenti 90 persone; le donne sono 14 più degli uomini. Quanti sono gli uomini?

A 31

B 38

C 59

D 76



*Soluzione.* Se  $x$  è il numero degli uomini, le donne sono  $x + 14$ . Il numero delle persone presenti alla conferenza è quindi:

$$x + (x + 14) = 90 \quad \Rightarrow \quad 2x = 76 \quad \Rightarrow \quad x = 38$$

La risposta esatta è la B.

**Esercizio 70.** Quanto alcol c'è in una bottiglia da tre quarti di litro che contiene una soluzione liquida di alcol al 4 per mille?

A 3 litri

B 3 decilitri

C 3 centilitri

D 3 millilitri

*Soluzione.* Basta impostare una proporzione:

$$4 : 1000 = x : 0,75 \text{ L} \quad \Rightarrow \quad 1000x = 4 \cdot 0,75 \text{ L} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 0,75}{1000} \text{ L} = 3 \text{ mL}$$

La risposta esatta è la D.

**Esercizio 71.** La terza parte di  $9^6$  è:

A  $3^2$

B  $9^2$

C  $3^6$

D  $3^{11}$

*Soluzione.*

$$\frac{9^6}{3} = \frac{(3^2)^6}{3} = \frac{3^{12}}{3} = 3^{11}$$

La risposta esatta è la D.

**Esercizio 72.** Alla fine dell'anno scolastico, in una classe di 30 alunni ne sono stati promossi 21. Qual è la percentuale di alunni bocciati?

A 7% B 21% C 30% D 70%

*Soluzione.* Gli alunni bocciati sono  $30 - 21 = 9$ . In percentuale:

$$\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 30\%$$

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 73.** Supponiamo che  $a$ ,  $b$  e  $c$  siano tre numeri interi e che

$$a \cdot b = 2 \quad b \cdot c = 3 \quad a \cdot c = 6$$

Quale fra i seguenti valori corrisponde al prodotto  $a \cdot b \cdot c$ ?

 A 6 B 12 C 18 D 36

*Soluzione.* Dall'equazione  $a \cdot b = 2$  segue che  $a = 1$  e  $b = 2$ , oppure che  $a = 2$  e  $b = 1$ . Poiché non può essere  $b = 2$  (altrimenti la seconda equazione non ha soluzioni intere) si ha che  $a = 2$  e  $b = 1$ . Dalla terza equazione si ottiene allora che  $2c = 6$ , da cui  $c = 3$ . Quindi  $a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ . La risposta esatta è la A. □

**Esercizio 74.** Se  $x$  e  $y$  sono numeri positivi, la somma dei loro quadrati è:

 A uguale al quadrato della loro somma B minore del quadrato della loro somma C maggiore del quadrato della loro somma D minore o maggiore del quadrato della loro somma

*Soluzione.* Dalla formula del quadrato di un binomio:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad \implies \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy < (x + y)^2$$

La somma dei quadrati è minore del quadrato della loro somma, quindi la risposta esatta è la B. □

**Esercizio 75.** Maria ha appena acquistato una felpa, scontata una prima volta del 20% sul prezzo iniziale e poi ancora scontata del 20% sul prezzo ribassato. Qual è lo sconto complessivo applicato sulla felpa?

A 20%

B 30%

C 36%

D 40%



*Soluzione.* Se  $x$  è il prezzo iniziale della felpa, applicando il primo sconto la felpa costa  $80x/100$  e applicando anche il secondo costa:

$$\frac{80x}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{64x}{100}$$

Lo sconto percentuale complessivo è quindi:

$$1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = 36\%$$

La risposta esatta è la C.

**Esercizio 76.** Quale delle seguenti frazioni vale 1,5?

A 15/10

B 15/100

C 1/5

D 5/10

*Soluzione.* Per trasformare in frazione un numero decimale si scrive al numeratore il numero senza virgola e al denominatore 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola. La risposta esatta è la A.

**Esercizio 77.** Su una carta stradale due città sono distanti 3 cm. Sapendo che la scala della carta è di 1 : 1 500 000, a quale distanza si trovano le due città?

A 4,5 km

B 15 km

C 45 km

D 450 km

*Soluzione.* Se  $x$  è la distanza tra le due città, vale la proporzione:

$$1 : 1\,500\,000 \text{ cm} = 3 : x \quad \Rightarrow \quad x = 4\,500\,000 \text{ cm} = 45\,000 \text{ m} = 45 \text{ km}$$

La risposta esatta è la C.

**Esercizio 78.** Anna ha speso in edicola un quinto dei soldi con cui è uscita da casa e in cartoleria la metà dei soldi rimasti. Dopo i due acquisti ha ancora 20 euro. Con quanti soldi è uscita da casa Anna?

A 40 €

B 50 €

C 60 €

D 100 €



*Soluzione.* Se  $x$  è la cifra con cui Anna è uscita da casa, i soldi spesi in edicola sono  $x/5$ , mentre quelli spesi in cartoleria sono la metà dei soldi rimasti  $x - x/5 = 4x/5$ . In formule:

$$x - \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}x = 20 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{x}{5} - \frac{2x}{5} = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{5} = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

La risposta esatta è la B.

**Esercizio 79.** L'equazione  $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ :

A è sempre verificata.

C è impossibile.

B ha infinite soluzioni.

D ha un'unica soluzione.

*Soluzione.*

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

La risposta esatta è la D.

**Esercizio 80.** Un uomo abituato a bere un quarto di vino al giorno deve osservare una dieta che prevede al massimo un quinto di litro di vino al giorno. A quale quantità giornaliera minima di vino dovrà rinunciare?

A 10 ml

B 25 ml

C 50 ml

D 100 ml

*Soluzione.* La quantità giornaliera minima di vino cui l'uomo dovrà rinunciare è:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \text{L} = \frac{5-4}{20} \text{L} = \frac{1}{20} \text{L} = \frac{5}{100} \text{L} = \frac{50}{1000} \text{L} = 50 \text{mL}$$

La risposta esatta è la C.

**Esercizio 81.** Oggi la popolazione mondiale è di circa sette miliardi. Tenuto conto che  $2^{10} \approx 10^3$ , qual è, fra le seguenti, la potenza di 2 più vicina al numero di abitanti della Terra?

A  $2^{20}$

B  $2^{30}$

C  $2^{33}$

D  $2^{70}$



*Soluzione.*

$$7 \cdot 10^9 = 7 \cdot (10^3)^3 \approx 7 \cdot (2^{10})^3 = 7 \cdot 2^{30} \approx 8 \cdot 2^{30} = 2^3 \cdot 2^{30} = 2^{33}$$

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 82.** Quanti sono i numeri di due cifre in cui la somma delle cifre è 12?

A 4

B 6

C 7

D 45

*Soluzione.* I numeri sono:

39   48   57   66   75   84   93

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 83.** In una successione ereditaria gli eredi sono quattro fratelli: al maggiore la defunta madre ha riservato un terzo dell'eredità. Supponendo che i quattro fratelli si dividano la parte rimasta in quote uguali, quale frazione dell'eredità spetta al fratello maggiore?

A  $1/6$

B  $1/5$

C  $1/4$

D  $1/2$



*Soluzione.* Al fratello maggiore spetta la parte riservata dalla madre ( $1/3$  dell'eredità) più un quarto della parte rimanente ( $2/3$  dell'eredità):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 84.** La quantità  $\frac{10^7 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}$  vale:

A  $10^{-11}$

B  $10^3$

C  $10^{11}$

D  $10^{15}$

*Soluzione.*

$$\frac{10^7 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 10^7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{12} = 10^{7-4+12} = 10^{15}$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 85.** A quanto corrispondono 3 ore e 50 minuti più 2 ore e 30 minuti?

A 6 ore e 20 minuti

C 6 ore e 80 minuti

B 6 ore e mezzo

D 580 minuti



*Soluzione.* Si ha che  $3\text{ h } 50\text{ m} + 2\text{ h } 30\text{ m} = 5\text{ h } 80\text{ m}$ . Poiché  $80\text{ m} = 1\text{ h e } 20\text{ m}$ , la risposta esatta è la A. □

**Esercizio 86.** A quanti  $\text{cm}^3$  corrispondono cento litri?

A  $10^2$

B  $10^3$

C  $10^4$

D  $10^5$

*Soluzione.*

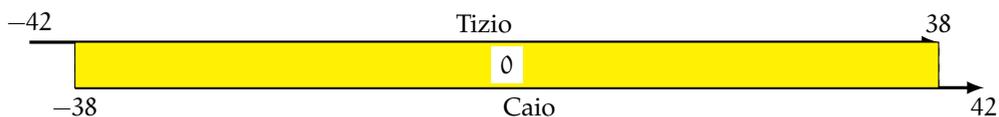
$$100\text{ L} = 100\text{ dm}^3 = 100 \cdot (10\text{ cm})^3 = 10^2 \cdot 10^3\text{ cm}^3 = 10^5\text{ cm}^3$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 87.** Tizio nasce nel 42 a.C. e muore nel 38 d.C., Caio nasce nel 38 a.C. e muore nel 42 d.C. Per quanti anni hanno vissuto insieme?

- A 38       B 42       C 76       D 84

*Soluzione.* Il seguente grafico schematizza la situazione:



Se ne deduce che Tizio e Caio hanno vissuto insieme dal 38 a.C al 38 d.C., cioè per  $38 - (-38) = 76$  anni. La risposta esatta è la C.

**Esercizio 88.** Dividendo in cinque parti uguali un angolo di un grado si ottiene un angolo di:

- A  $0,2'$        B  $12'$        C  $20'$        D  $1,5^\circ$

*Soluzione.* Un grado è uguale a  $60'$ ; dividendolo per 5 si hanno  $12'$ . La risposta esatta è la B.

**Esercizio 89.** In una comunità di 5000 persone, il 5% è colpito da una malattia che richiede il ricovero nel 50% dei casi. Quanti ricoveri ci sono stati?

- A 50       B 125       C 175       D 150



*Soluzione.* Il numero di ricoveri è:

$$50\% \cdot 5\% \cdot 5000 = \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot 5000 = \frac{1250000}{10000} = 125$$

La risposta esatta è la B.

**Esercizio 90.** Se  $x + y = 1/2$  e  $x = 1/3$ , quanto vale  $y$ ?

A  $-1/5$

B  $1/6$

C  $1/5$

D  $5/6$

*Soluzione.*

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{3} + y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La risposta esatta è la B. □

**Esercizio 91.** La radice quadrata di  $64^{2016}$  è:

A  $8^{2014}$

B  $8^{2018}$

C  $64^{2014}$

D  $64^{1008}$

*Soluzione.*

$$\sqrt{64^{2016}} = (64^{2016})^{1/2} = 64^{1008}$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 92.** Se  $a = -\frac{1}{2}$  e  $b = \frac{3}{2}$ , quanto vale  $\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2}$ ?

A  $1/2$

B  $-1/2$

C  $2$

D  $-2$

*Soluzione.*

$$\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{a(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a}{a + b} = \frac{-1/2}{-1/2 + 3/2} = -\frac{1}{2}$$

La risposta esatta è la B. □

**Esercizio 93.** Un numero intero tale che la differenza tra il suo quadrato e i  $3/2$  del numero stesso sia uguale a 52 è:

A  $6$

B  $8$

C  $10$

D  $12$

*Soluzione.* L'equazione che risolve il problema è:

$$x^2 - \frac{3}{2}x = 52 \implies 2x^2 - 3x - 104 = 0$$

da cui:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 832}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{841}}{4} = \frac{3 \pm 29}{4} \implies x = -\frac{13}{2} \text{ oppure } x = 8$$

La soluzione  $-13/2$  non è accettabile perché non è intera, quindi la risposta esatta è la B.

**Esercizio 94.** L'equazione di secondo grado  $x^2 + 3x - 28 = 0$ :

- A ha due soluzioni positive
- B ha due soluzioni e quella negativa ha valore assoluto maggiore
- C non ha soluzioni
- D ha due soluzioni e quella negativa ha valore assoluto minore

*Soluzione.*

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} \implies x = -7 \text{ oppure } x = 4$$

La soluzione negativa ( $-7$ ) ha valore assoluto maggiore di quella positiva ( $4$ ), quindi la risposta esatta è la B.

**Esercizio 95.** Se  $1 : x^2 = 18 : 72$ , quanto vale  $x$ ?

- A  $-4$        B  $-\sqrt{2}$        C  $\pm 2$        D  $4$

*Soluzione.*

$$1 : x^2 = 18 : 72 \implies 18x^2 = 72 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

La risposta esatta è la C.

**Esercizio 96.** La somma di due angoli misura  $180^\circ$  e la loro differenza  $90^\circ$ . Quanto misurano i due angoli?

- A  $90^\circ$  e  $90^\circ$        B  $180^\circ$  e  $90^\circ$        C  $45^\circ$  e  $135^\circ$        D  $90^\circ$  e  $45^\circ$

*Soluzione.* Se  $x$  e  $y$  sono i due angoli espressi in gradi, allora:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 90 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 270 \\ x - y = 90 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 135 \\ y = 45 \end{cases}$$

La risposta esatta è la C.

## 6.2 GEOMETRIA

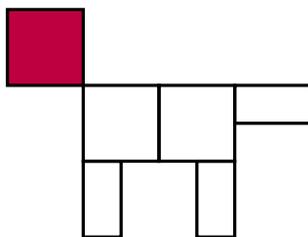
**Esercizio 97.** Quale frazione della figura seguente rappresenta la parte colorata?

A  $2/9$

B  $1/5$

C  $1/6$

D  $2/5$



*Soluzione.* Dividendo i tre quadrati in due rettangoli si ottengono in tutto nove rettangoli; due di essi sono colorati, quindi la parte colorata è  $2/9$ . La risposta esatta è la A.

**Esercizio 98.** Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato nella seguente figura 1. L'area di A è 16 e quella di B è 9. Qual è il perimetro del poligono C?

A 20

B 22

C 32

D 49

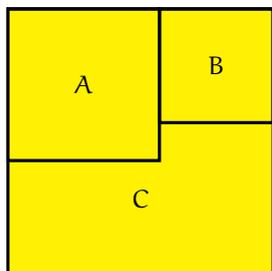


Figura 1

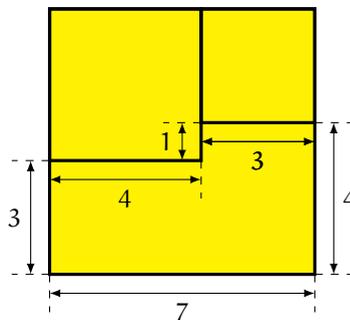


Figura 2

*Soluzione.* Il lato di A è  $\sqrt{16} = 4$ , mentre il lato di B è  $\sqrt{9} = 3$ . Il perimetro di C è allora dato da (vedi la figura 2):

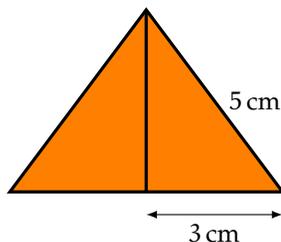
$$7 + 4 + 3 + 1 + 4 + 3 = 22$$

La risposta esatta è la B.

**Esercizio 99.** Un triangolo isoscele ha la base lunga 6 cm e il lato obliquo lungo 5 cm. Qual è la sua area?

- A  $12 \text{ cm}^2$        B  $16 \text{ cm}^2$        C  $24 \text{ cm}^2$        D  $30 \text{ cm}^2$

*Soluzione.* La figura seguente rappresenta il triangolo:



L'altezza del triangolo si trova con il teorema di Pitagora:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} \text{ cm} = \sqrt{25 - 9} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

L'area del triangolo è  $6 \cdot 4 / 2 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$ , quindi la risposta esatta è la A.

**Esercizio 100.** Dalla casa di Anna a quella di Bianca c'è una distanza di 700 metri; da quella di Bianca a quella di Carla 500 metri. La distanza tra la casa di Anna e quella di Carla è:

- A 1200 m       C più di 1200 m  
 B meno di 1200 m       D non più di 1200 m

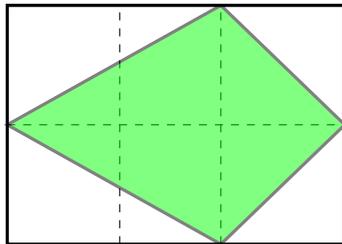
*Soluzione.* Se le case sono allineate la distanza è esattamente di 1200 m. Negli altri casi la distanza è minore di 1200 m. La risposta esatta è la D.

**Esercizio 101.** Un rettangolo di lati  $a$  e  $b$  è equivalente a un quadrato di lato  $l$ . Qual è la relazione tra  $a$ ,  $b$  e  $l$ ?

- A  $l^2 = ab$        B  $l = 2ab$        C  $2l = a + b$        D  $4l = 2ab$

*Soluzione.* L'area del quadrato è  $l^2$ , mentre l'area del rettangolo è  $ab$ . La risposta esatta è la A.

**Esercizio 102.** Da un foglio di carta A4 ( $21 \text{ cm} \cdot 29,7 \text{ cm}$ ) si ricava un aquilone simmetrico come quello rappresentato nella figura seguente. L'area dell'aquilone rispetto a quella del foglio è:

A  $2/3$  B  $1/2$  C  $3/4$  D  $5/8$ 

*Soluzione.* Le dimensioni del foglio non hanno importanza. Osservando la figura si nota che le parti colorate e quelle in bianco sono uguali. La risposta esatta è la B.

**Esercizio 103.** Un barattolo cilindrico ha il diametro di base di 6,6 cm e l'altezza di 14 cm. Qual è la capacità del barattolo?

 A esattamente un terzo di litro C esattamente mezzo litro B poco meno di un terzo di litro D poco meno di mezzo litro

*Soluzione.* Il volume  $V$  del barattolo è:

$$V = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot (3,3)^2 \cdot 14 \text{ cm}^3 \approx 478 \text{ cm}^3$$

dove  $R$  e  $h$  sono rispettivamente il suo raggio di base e la sua altezza. Poiché  $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ , la risposta esatta è la D.

**Esercizio 104.** Per quale valore di  $m$  l'equazione  $y = mx$  rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate  $(3, 12)$ ?

 A  $m = 2$  B  $m = 3$  C  $m = 4$  D  $m = 12$ 

*Soluzione.* Sostituiamo nell'equazione  $y = mx$  le coordinate del punto  $(3, 12)$ :

$$12 = m \cdot 3 \quad \implies \quad m = 4$$

La risposta esatta è la C.

**Esercizio 105.** Per scavare le gallerie di una linea metropolitana si usa una macchina cilindrica che sposta la terra come quella della figura seguente. La galleria che la macchina scava ha un diametro di 6,80 m. Oggi la macchina ha scavato un tratto lungo 10 metri. Qual è circa il volume di terra che è

stato rimosso?

A  $70 \text{ m}^3$

B  $120 \text{ m}^3$

C  $360 \text{ m}^3$

D  $470 \text{ m}^3$



*Soluzione.* Il volume  $V$  di terra rimosso è:

$$V = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot \left(\frac{6,80}{2}\right)^2 \cdot 10 \text{ m}^3 \approx 363 \text{ m}^3 \approx 360 \text{ m}^3$$

dove  $R$  è il raggio di base del cilindro e  $h$  la sua altezza. La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 106.** La pizza *baby* che prepara Raffaele mantiene la stessa forma circolare e lo stesso spessore della normale pizza margherita, ma preparata usando metà dell'impasto necessario per quest'ultima. Se il raggio della pizza normale è 18 cm, qual è circa il raggio della pizza *baby* di Raffaele?

A 9 cm

B 10 cm

C 11 cm

D 13 cm

*Soluzione.* Il volume  $V$  di una normale pizza margherita è:

$$V = \pi R^2 h$$

dove  $R$  è il suo raggio e  $h$  è il suo spessore. Il volume  $v$  di una pizza *baby* è invece

$$v = \pi r^2 h$$

dove  $h$  è il suo spessore (uguale a quello della normale pizza margherita) e  $r$  è il suo raggio. Il volume di una pizza *baby* è metà del volume di una normale pizza margherita:

$$v = \frac{V}{2} \implies \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi R^2 h \implies r^2 = \frac{1}{2} R^2 \implies r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}} \text{ cm} \approx 13 \text{ cm}$$

La risposta esatta è la D. □

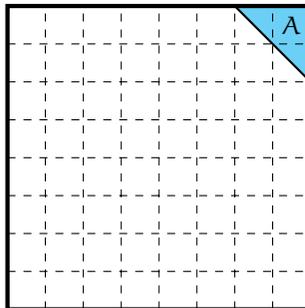
**Esercizio 107.** L'area del triangolo A rappresentato nella figura seguente misura 8 metri quadrati. Quanto misura il perimetro del quadrato?

A 32 m

B 60 m

C 64 m

D 128 m



*Soluzione.* Se  $x$  è la base del triangolo A, allora:

$$\frac{x^2}{2} = 8 \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ m}$$

Quindi il quadrato ha lato  $4 \cdot 4 \text{ m} = 16 \text{ m}$  e perimetro  $16 \cdot 4 \text{ m} = 64 \text{ m}$ . La risposta esatta è la C.

*Soluzione.* Il triangolo A è equivalente a due «quadratinini». Poiché l'area di A è  $8 \text{ m}^2$ , l'area di un «quadratinino» è  $4 \text{ m}^2$ . Poiché il quadrato principale è formato da 64 «quadratinini», la sua area è  $64 \cdot 4 \text{ m}^2 = 256 \text{ m}^2$ . Il lato del quadrato è la radice quadrata di  $256 \text{ m}^2$ , cioè 16 m, e il suo perimetro è  $16 \cdot 4 \text{ m} = 64 \text{ m}$ . La risposta esatta è la C.

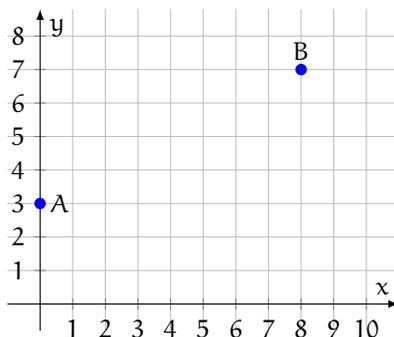
**Esercizio 108.** Sul seguente piano cartesiano sono assegnati i punti A e B. Qual è il coefficiente angolare della retta AB?

A  $1/2$

B 3

C 7

D 8



*Soluzione.* I punti A e B hanno rispettivamente coordinate (0,3) e (8,7). Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 3}{8 - 0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

La risposta esatta è la A. □

**Esercizio 109.** Dati i punti A(1,1) e (3,2), quale dei punti seguenti è allineato con A e B?

A (-1,0)

B (1,3)

C (0,-1)

D (3,3)

*Soluzione.* Troviamo l'equazione della retta AB. Il suo coefficiente angolare m è:

$$m = \frac{2 - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

La retta AB è quindi:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Tra i quattro proposti, l'unico punto che verifica l'equazione è (-1,0), quindi la risposta esatta è la A. □

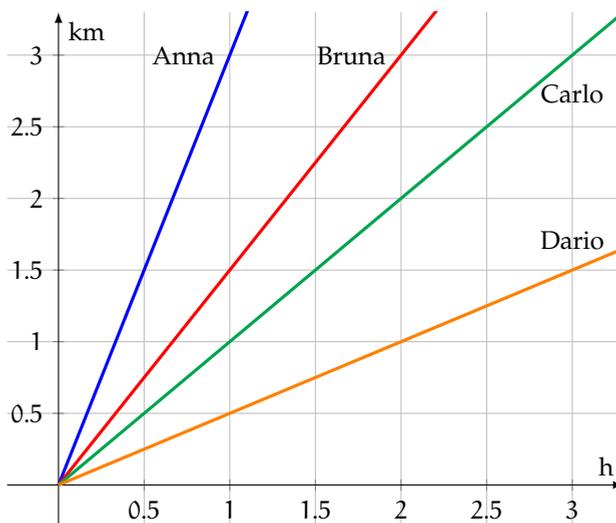
**Esercizio 110.** Anna, Bruna, Carlo e Dario fanno una gara in bicicletta su un percorso di 3 km. Il grafico seguente riporta le rette che rappresentano la distanza percorsa in km per ora, per ciascuno di essi. Chi vince la gara?

A Andrea

B Bruna

C Carlo

D Diana



*Soluzione.* Anna arriva al traguardo dopo un'ora, Bruna impiega due ore e Carlo tre. Dario ci mette ancora più tempo. La risposta esatta è la A.

### 6.3 PROBABILITÀ E STATISTICA

**Esercizio 111.** Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca un numero dispari?

A  $1/6$

B  $1/3$

C  $1/2$

D  $3/5$

*Soluzione.* I numeri pari sono tanti quanti sono i numeri dispari, quindi la probabilità è  $1/2$  o 50%. La risposta esatta è la C.

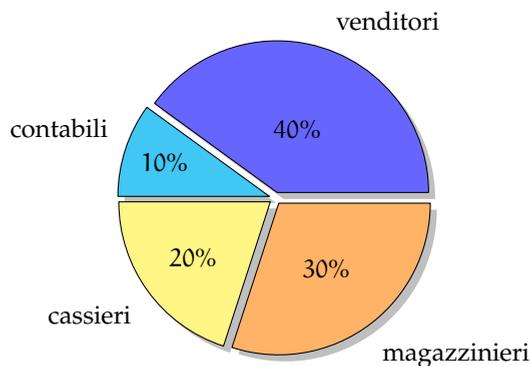
**Esercizio 112.** In una libreria gli impiegati sono suddivisi come nel grafico seguente. Qual è il numero dei magazzinieri, sapendo che ci sono quattro cassieri, otto venditori e due contabili?

A 3

B 4

C 5

D 6



*Soluzione.* I magazzinieri sono il triplo dei contabili (il 30% contro il 10%). Poiché  $3 \cdot 2 = 6$ , la risposta esatta è la D.

**Esercizio 113.** Uno studente universitario, dopo aver superato tre esami, ha la media di 28. Nell'esame successivo lo studente prende 20. Qual è la sua media dopo il quarto esame?

A 22

B 24

C 26

D 28

*Soluzione.* Se  $x$  è il voto del quarto esame, la media dello studente è:

$$\frac{28 \cdot 3 + 20}{4} = \frac{84 + 20}{4} = \frac{104}{4} = 26$$

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 114.** Uno studente ha avuto 5 e mezzo nei primi due compiti. Quale voto dovrà raggiungere nel terzo compito per ottenere la media del 6?

- A 5 e mezzo     B 6     C 6 e mezzo     D 7

*Soluzione.* Se  $x$  è il voto nel terzo compito, la media è:

$$\frac{5,5 + 5,5 + x}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad 11 + x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

La risposta esatta è la D. □

**Esercizio 115.** In una scatola ci sono dieci palline nere, una pallina rossa e una verde. Qual è la probabilità, pescandone due a caso, che si tratti della pallina rossa e di quella verde?

- A 1/132     B 1/66     C 1/54     D 1/5

*Soluzione.* La probabilità di estrarre subito la pallina rossa è  $1/12$ . Poiché la pallina rossa estratta non viene rimessa nella scatola, prima della seconda estrazione nell'urna sono rimaste 11 palline; la probabilità di estrarne una rossa è quindi  $1/11$ . La probabilità di estrarre prima la pallina rossa e poi quella verde è quindi:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{132}$$

La probabilità di estrarre prima la pallina verde e poi quella rossa è la stessa. La probabilità richiesta è quindi:

$$\frac{1}{132} + \frac{1}{132} = \frac{1}{66}$$

La risposta esatta è la B. □

**Esercizio 116.** In un sacchetto ci sono otto caramelle al limone e due alla menta. Quante caramelle alla menta bisogna aggiungere per far sì che la probabilità di estrarre una caramella alla menta sia  $1/3$ ?

- A 2     B 3     C 4     D 5

*Soluzione.* Se  $x$  è il numero di caramelle alla menta da aggiungere, il numero di caramelle alla menta è  $2 + x$  e il numero totale di caramelle è  $8 + (2 + x) = 10 + x$ . La probabilità di estrarre una caramella alla menta è allora:

$$\frac{2+x}{10+x} = \frac{1}{3} \implies 2+x = \frac{1}{3}(10+x) \implies 6+3x = 10+x \implies x = 2$$

La risposta esatta è la A. □

**Esercizio 117.** La tabella seguente descrive la composizione di un nucleo familiare e le relative età. Qual è l'età media di questo nucleo familiare tra cinque anni?

A 25

B 26

C 27

D 28

Componente	Età
padre	40
madre	38
1° figlio	8
2° figlio	2

*Soluzione.* L'età media del nucleo familiare oggi è:

$$\frac{40 + 38 + 8 + 2}{4} = \frac{88}{4} = 22$$

Fra cinque anni l'età media sarà  $22 + 5 = 27$ , quindi la risposta esatta è la C. □

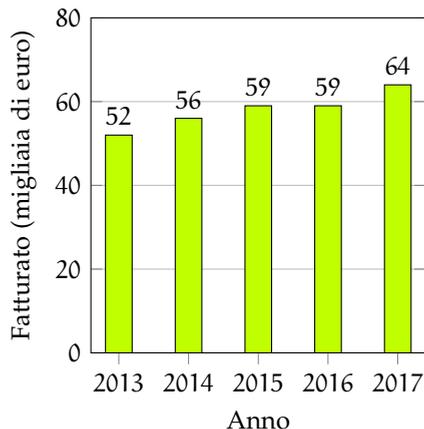
**Esercizio 118.** Il grafico seguente riporta i fatturati (in migliaia di euro) di un'azienda nel quinquennio 2013-2017. Qual è il fatturato medio nel quinquennio?

A 56

B 57

C 58

D 59



*Soluzione.* Il fatturato medio è:

$$\frac{52 + 56 + 59 + 59 + 64}{5} = \frac{290}{5} = 58$$

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 119.** Un'urna contiene 50 gettoni colorati: 20 sono verdi, 18 rossi e 10 blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu?

A 1/25

B 9/25

C 3/5

D 16/25

*Soluzione.* La probabilità è il numero di casi favorevoli ( $50 - 20 - 18 - 10 = 2$ ) diviso per il numero di casi possibili (50). Poiché  $2/50 = 1/25$ , la risposta esatta è la A. □

**Esercizio 120.** La tombola è un gioco in cui si estraggono i numeri da 1 a 90 uno alla volta. Un numero non può essere estratto più volte. Ogni giocatore ha una cartella con tre righe da cinque numeri ciascuna. I numeri di ogni cartella vengono coperti quando sono estratti. Dopo 20 estrazioni Samuele ha coperto cinque numeri nella sua cartella, come puoi vedere nella figura seguente. Qual è la probabilità che Samuele faccia terno (tre numeri coperti sulla stessa riga) alla successiva estrazione?

A 3/90

B 3/70

C 6/70

D 6/90

	10	●			●		78	81
●	15			41		●		85
		27	●		58	65		87

*Soluzione.* Samuele fa terno all'estrazione successiva se esce uno tra i numeri 10, 78, 81 (nella prima riga della sua cartella), 15, 41 o 85 (nella seconda riga). La probabilità è il numero di casi favorevoli (6) diviso per il numero di casi possibili (70, perché 20 numeri sono già usciti). La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 121.** Dalle prime 10 misure risulta che il peso degli studenti di una scuola è in media di 60 kg. Le successive 15 misure danno un peso medio di 55 kg. Qual è il peso medio dei 25 studenti?

A 55 kg

B 56 kg

C 57 kg

D 58 kg

*Soluzione.* Per la formula della media pesata:

$$\frac{10 \cdot 60 + 15 \cdot 55}{10 + 15} = \frac{600 + 825}{25} = 57$$

La risposta esatta è la C. □

**Esercizio 122.** Una fabbrica usa due diverse stampanti,  $S_1$  e  $S_2$ , per produrre biglietti d'auguri. La probabilità che un biglietto stampato da  $S_1$  sia difettoso è del 3%, mentre la probabilità che un biglietto stampato da  $S_2$  sia difettoso è del 2%. Per realizzare i biglietti d'auguri,  $S_1$  e  $S_2$  lavorano in serie: ogni biglietto è stampato prima da  $S_1$  e poi da  $S_2$ . Gli eventi « $S_1$  produce un biglietto non difettoso» e « $S_2$  produce un biglietto non difettoso» sono tra loro indipendenti. La probabilità che un biglietto non sia difettoso dopo essere stato stampato sia da  $S_1$  che da  $S_2$  è:

A 1,95%

B 6%

C 95,06%

D 98%

*Soluzione.* La probabilità che  $S_1$  produca un biglietto non difettoso è del  $(100 - 3)\% = 97\%$ , mentre la probabilità che  $S_2$  produca un biglietto non difettoso è del  $(100 - 2)\% = 98\%$ . Poiché gli eventi sono indipendenti, la probabilità che un biglietto non sia difettoso dopo essere stato stampato sia da  $S_1$  che da  $S_2$  è:

$$97\% \cdot 98\% = \frac{97}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{9506}{10000} = 95,06\%$$

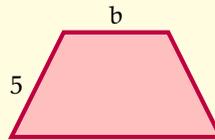
La risposta esatta è la C. □

## 6.4 ESERCIZI

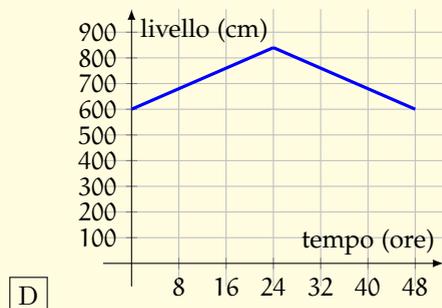
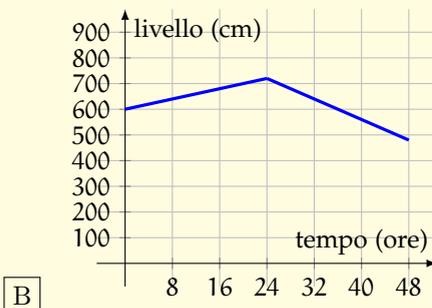
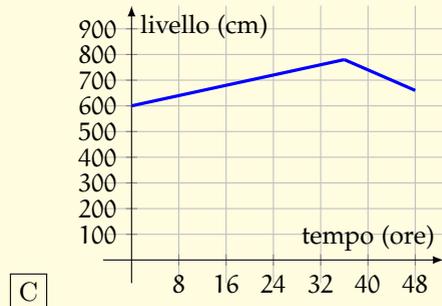
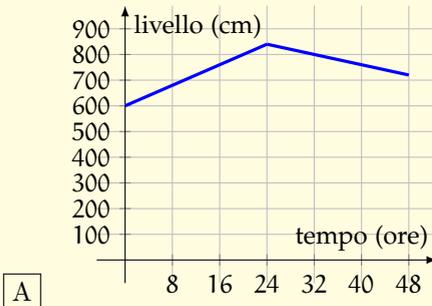
# Chi non risolve esercizi non impara la matematica.

1 Indica la risposta corretta.

- a. Nel seguente trapezio isoscele la base maggiore è doppia della minore. Quale formula esprime il perimetro del trapezio in funzione di  $b$ ?



- [A]  $2b + 10$       [B]  $3b + 5$       [C]  $b + b + 10$       [D]  $3b + 10$
- b. Se  $x = 3$  quanto vale  $y$  secondo la formula  $y = 2x - 1$ ?
- [A]  $-1$       [B]  $1$       [C]  $3$       [D]  $5$
- c. Un giorno il livello dell'acqua di un fiume è aumentato di  $10\text{ cm}$  l'ora per tutte le 24 ore. Il giorno successivo, il livello dell'acqua è diminuito di  $5\text{ cm}$  l'ora per tutte le 24 ore. Quale tra i seguenti grafici rappresenta la situazione descritta?



d. La funzione  $y = (4x - 1)^2$  ha per grafico una:

- A iperbole       B circonferenza       C parabola       D ellisse

e. Per una ditta, il costo di ogni fotocopia è 1 centesimo di euro. La ditta, inoltre, paga un canone mensile fisso di 50 euro per il noleggio della fotocopiatrice. La formula che descrive il costo mensile  $C$  in euro in funzione del numero  $x$  di fotocopie è:

- A  $C = 0,01x$        C  $C = 0,01 + x$   
 B  $C = 50 + 0,01x$        D  $C = 0,01 + 50x$

f. Considera la funzione definita da  $y = -2x + 1$ . Quale valore di  $y$  si ottiene per  $x = 0$ ?

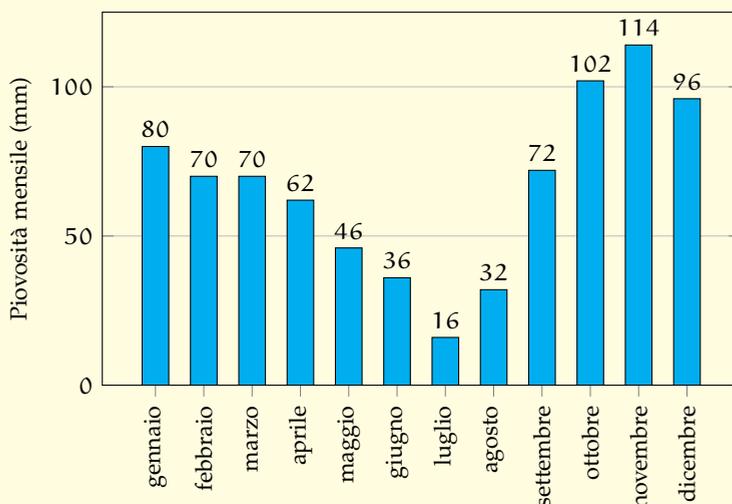
- A 1       B 2       C 3       D 4

g. Considera la funzione definita da  $y = -2x + 1$ . Quale valore di  $x$  si ottiene per  $y = 0$ ?

- A 0,5       B  $1/2$        C  $2/3$        D  $3/2$

[Due risposte A, due B, una C e due D]

2 Il grafico seguente rappresenta la piovosità mensile di Cesena nel 2018.



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

a. A novembre si registra la piovosità massima.

- V       F

b. Ad agosto si registra la piovosità minima.

- V       F

c. Per otto mesi l'anno la piovosità supera i 50 mm.

- V       F

- d. Per tre mesi l'anno la piovosità supera i 100 mm.  V  F
- e. La differenza di piovosità tra novembre e luglio è inferiore ai 100 mm.  V  F

[Tre affermazioni vere e due false]

**3** Indica la risposta corretta.

a. Un quarto di milione è:

- A 1/4 000 000     B 25 250     C 250 000     D 2 500 000

b. Per quali valori di  $x$  l'equazione  $4x^2 = 0$  è verificata?

- A  $x = -4$      B  $x = 0$      C  $x = 1/2$      D  $x = \pm 1/2$

c. L'equazione  $y = 2x - 4$  rappresenta:

- A una retta     C un punto  
 B una parabola     A una circonferenza

d. Per la manutenzione del sistema di riscaldamento di un condominio un tecnico chiede un compenso fisso di 60 euro, più 40 euro per ogni ora di lavoro. Quale delle seguenti formule permette di calcolare il compenso complessivo  $C$  (in euro) al variare della durata  $t$  (in ore) del lavoro svolto?

- A  $C = 60t$      B  $C = 40t$      C  $C = 40 + 60t$      D  $C = 60 + 40t$

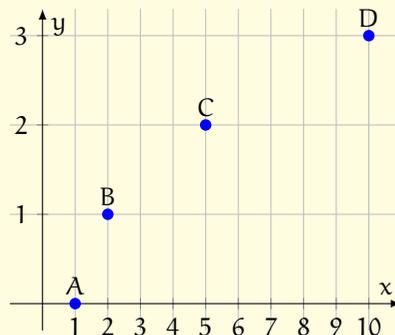
e. Il valore della funzione  $y = 2x^2 - 4$  per  $x = 4$  è

- A  $-28$      B  $2$      C  $16$      D  $28$

f. Quale fra le seguenti rappresenta una funzione sempre crescente passante per l'origine?

- A  $y = -2x$      B  $y = 2x + 5$      C  $y = 3x$      D  $y = 0$

g. Il grafico della funzione  $f$  passa per i punti A, B, C e D, rappresentati sul seguente piano cartesiano. Quale tra le formule seguenti individua  $f$ ?



A  $y = \sqrt{x-1}$      B  $y = \sqrt{x^2-1}$      C  $y = x-1$      D  $y = x^2-1$

[Due risposte A, una B, due C e due D]

4 Indica la risposta corretta.

a. La soluzione del sistema  $x = 4; x - y = 6$  è:

A  $x = 4; y = 2$      B  $x = 4; y = -2$      C  $x = 0; y = 2$      D  $x = 4; y = 6$

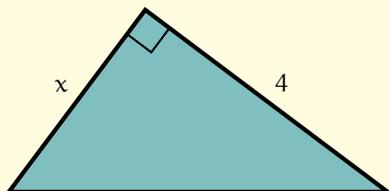
b. La parabola di equazione  $y = x^2 - 1$ :

- A ha vertice in  $(0, -1)$   
 B passa per il punto  $(0, 1)$   
 C interseca in due punti distinti l'asse delle ordinate  
 D non interseca mai l'asse delle ascisse

c. Il contratto con il fornitore Internet di Carlo prevede, ogni mese, un costo fisso  $F$  e un costo variabile proporzionale al tempo di connessione  $t$  espresso in ore. Il costo in euro per ogni ora di connessione è indicato con  $k$ . Quale delle seguenti formule esprime il costo  $C$  che Carlo deve sostenere, ogni mese, in funzione delle ore di connessione?

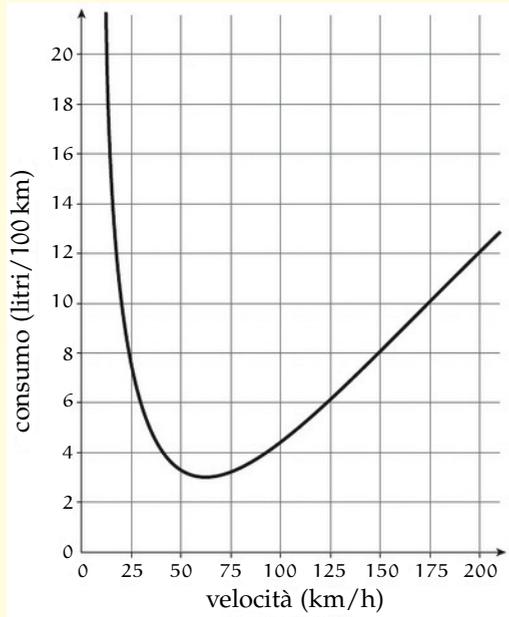
A  $C = F \cdot t + k \cdot t$      B  $C = k + F \cdot t$      C  $C = F + k \cdot t$      D  $C = F \cdot k \cdot t$

d. In un triangolo rettangolo un cateto misura 4 cm. Se l'altro cateto è lungo  $x$ , qual è l'espressione della lunghezza  $i$  dell'ipotenusa?



A  $i = \sqrt{x-4}$      B  $i = \sqrt{x+4}$      C  $i = \sqrt{x^2+4}$      D  $i = \sqrt{x^2+16}$

e. Il grafico seguente mostra i litri di benzina consumati in media da un'automobile per percorrere 100 km, a seconda della sua velocità. In base al grafico, a quale velocità si deve viaggiare per consumare meno carburante possibile?



A tra 25 e 50 km/h

C 75 km/h

B tra 50 e 75 km/h

D 85 km/h

f. Quale delle seguenti funzioni lineari  $y = f(x)$  è tale che  $f(-2) = 3$  e  $f(3) = -2$ ?

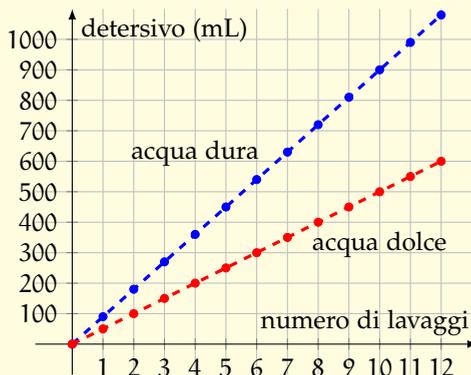
A  $y = -x + 1$

B  $y = -2x + 4$

C  $y = x + 5$

D  $y = -2x - 1$

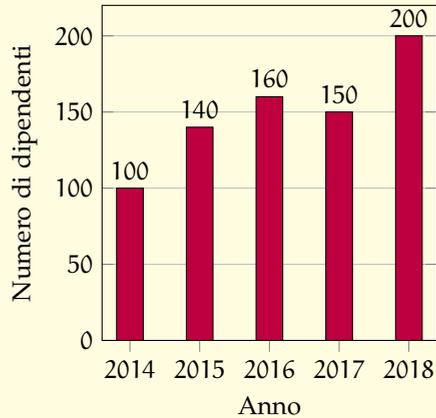
g. L'acqua si può classificare in «dura» o «dolce» in base ai sali in essa presenti. Il grafico seguente si riferisce a un detersivo per lavatrici e mostra come varia la quantità da usare in base al numero di lavaggi in acqua dura o dolce. Se si usa il detersivo per dieci lavaggi in acqua dolce, quanto detersivo si userebbe in più in acqua dura?



A 200 ml B 300 ml C 350 ml D 400 ml

[Due risposte A, due B, una C e due D]

5 Il grafico seguente riporta il numero dei dipendenti di un'azienda nel corso del quinquennio 2014-2018.



- In quale anno ci sono stati meno dipendenti?
- Qual è stato l'anno di massimo incremento assoluto?
- Qual è stato l'anno di massimo incremento relativo?

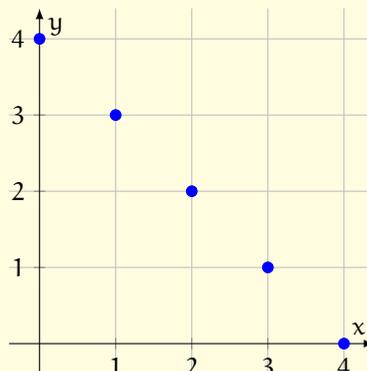
[2014; 2018; 2015]

6 Indica la risposta corretta.

- Quanti zeri bisogna scrivere alla destra di 7 per avere 70 miliardi?

 A sette B otto C nove D dieci

- Se  $x$  e  $y$  sono numeri interi, quali tra le seguenti è la relazione tra  $x$  e  $y$  per i punti disegnati nel grafico seguente?



A  $x + 4y = 4$        B  $y = x - 4$        C  $x = y - 4$        D  $y = 4 - x$

c. L'espressione  $(2x - y)^2$  vale:

A  $2x^2 - y^2$        B  $4x^2 - 4xy + y^2$        C  $4x^2 + y^2$        D  $2x^2 + y^2$

d. Che cosa rappresenta nel piano cartesiano l'equazione  $y = -16$ ?

- A un punto       C una retta parallela all'asse  $y$   
 B una retta parallela all'asse  $x$        D una retta passante per l'origine

e. Qual è la probabilità che lanciando sei volte una moneta esca esattamente una testa?

A  $1/8$        B  $1/4$        C  $3/8$        D  $1/2$

f. Se due rette sono perpendicolari:

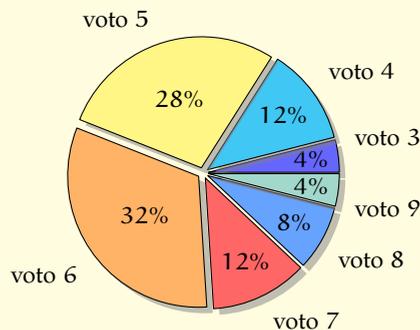
- A il rapporto dei loro coefficienti angolari è  $-1$   
 B il rapporto dei loro coefficienti angolari è  $1$   
 C il prodotto dei loro coefficienti angolari è  $-1$   
 D hanno lo stesso coefficiente angolare

g. Se  $x$  e  $y$  sono due numeri positivi, la radice quadrata di  $x^2 + y^2$  è:

- A minore di  $x + y$   
 B minore o uguale a  $x + y$  a seconda dei valori di  $x$  e  $y$   
 C uguale a  $x + y$   
 D uguale alla somma delle radici quadrate di  $x$  e di  $y$

[Una risposta A, due B, due C e due D]

**7** Il seguente grafico rappresenta i voti conseguiti nella verifica di matematica dagli alunni di una classe. Gli alunni che hanno preso 6 sono stati in tutto otto.



- a. Da quanti alunni è costituita la classe?
- b. Qual è la percentuale degli alunni che non hanno ottenuto la sufficienza?
- c. Quanti alunni hanno preso un voto maggiore della sufficienza?
- d. Qual è il voto medio conseguito dagli alunni nella verifica?
- e. Qual è il voto mediano conseguito dagli alunni nella verifica?

[25; 44%; 5; 5,76; 6]

**8** Indica la risposta corretta.

- a. La scomposizione in fattori primi del polinomio  $x^3 - 5x^2 - 6x$  è:

A  $x(x-3)(x+2)$     B  $x(x+6)(x-1)$     C  $x(x-6)(x+1)$     D  $x(x+3)(x-2)$

- b. La differenza dei quadrati di due espressioni algebriche è uguale:

A alla somma dei quadrati delle basi

B al prodotto dei quadrati delle basi

C al prodotto della somma delle basi per la loro differenza

D alla somma del prodotto delle basi e della loro differenza

- c. Il monomio  $-2x^2y$  ha grado complessivo:

A 0                       B 1                       C 2                       D 3

- d. Il numero  $(1/2)^{-2}$  vale:

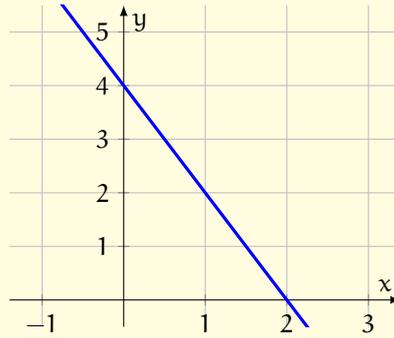
A -4                       B  $-1/4$                        C  $1/4$                        D 4

- e. È data la seguente tabella di valori. Da quale delle seguenti relazioni è rappresentata?

x	0	1	2
y	2	3	6

A  $y = x^2 + 2$                        B  $y = 2x^2 - 2$                        C  $y = x + 2$                        D  $y = 2x + 2$

- f. Qual è l'equazione della retta rappresentata nel grafico seguente?



- A  $y = -2x + 4$     
 B  $y = -4x + 2$     
 C  $y = 4x + 2$     
 D  $y = 2x + 4$

g. In un piano sono disegnate quattro rette  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ :  $a$  è perpendicolare a  $b$ ;  $b$  è perpendicolare a  $c$ ;  $c$  è perpendicolare a  $d$ . Quale affermazione è corretta?

- A  $a$  e  $d$  sono parallele    
 C  $c$  e  $d$  sono parallele  
 B  $b$  e  $d$  sono parallele    
 D  $a$  e  $c$  sono perpendicolari

[Due risposte A, una B, due C e due D]

9 Indica la risposta corretta.

a. In una gara sui cento metri piani il primo arrivato ha un tempo di 10,2 secondi e il terzo di 10,5 secondi. Allora:

- A il secondo arrivato ha un tempo non superiore a 10,5 secondi.  
 B il secondo non ha un tempo perché è stato squalificato.  
 C il primo e il terzo sono arrivati appaiati.  
 A il secondo ha certamente un tempo di 10,3 secondi.

b. L'espressione  $(a - b)^2$  è uguale a:

- A  $a^2 + b^2$     
 B  $a^2 - b^2$     
 C  $a^2 - 2ab + b^2$     
 D  $a^2 + 2ab + b^2$

c. Quanto fa  $800 : 0,2$ ?

- A 0,4    
 B 40    
 C 400    
 D 4000

d. Qual è l'area del triangolo che ha come vertici i punti  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(13, 12)$ ?

A 6

B  $13/2$ 

C 12

D 13

e. Qual è il numero che precede 8800?

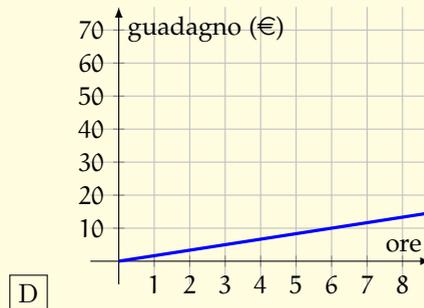
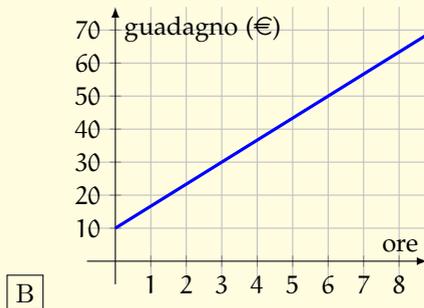
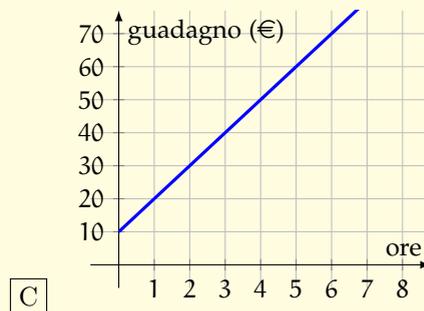
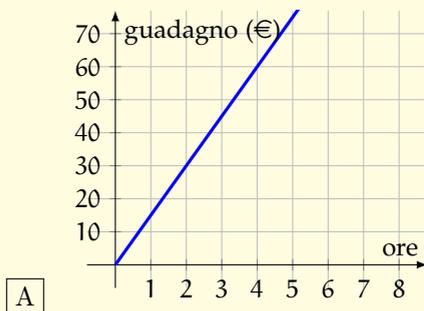
A 8700

B 8709

C 8790

D 8799

f. Giacomo ha ricevuto una proposta di lavoro: il suo contratto prevede una retribuzione di 6 euro l'ora e un fisso di 10 euro al giorno. Quale tra i seguenti grafici rappresenta il guadagno di Giacomo in funzione delle ore al giorno?

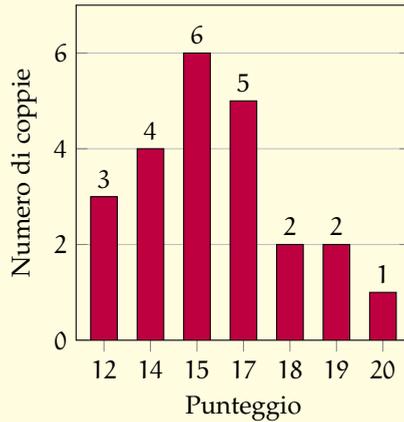


g. Quale frazione rappresenta un mese rispetto a un anno?

A  $1/365$ B  $1/30$ C  $1/12$ D  $1/10$ 

[Una risposta A, due B, due C e due D]

**10** Il grafico seguente rappresenta la distribuzione di frequenza dei punteggi attribuiti da una giuria alle coppie partecipanti a una gara di ballo.



- Quante coppie hanno partecipato alla gara?
- Quante coppie hanno ottenuto almeno 15 punti?
- Qual è la media dei punteggi attribuiti alla giuria?

[23; 16; 15,7]

**11** Indica la risposta corretta.

- I 20 alunni di una classe si stringono la mano. Ciascuno stringe la mano a tutti gli altri una volta sola. Quante sono le strette di mano in tutto?

A 20                       B 40                       C 190                       D 380

- Qual è la media dei numeri 5, 9 e 10?

A 5                       B 8                       C 9                       D 10

- Quale tra i seguenti numeri *non* è primo?

A 11                       B 13                       C 17                       D 21

- Quale dei seguenti numeri *non* è un quadrato perfetto?

A 1000                       B  $11 \cdot 44$                        C  $12 \cdot 27$                        D 256

- La somma  $a/b + c/d$  vale:

A  $\frac{a+c}{b+d}$                        B  $\frac{ad+bc}{bd}$                        C  $\frac{ac+bd}{bd}$                        D  $\frac{ac}{bd}$

- La radice quadrata di un numero  $x$  maggiore di 1 è:

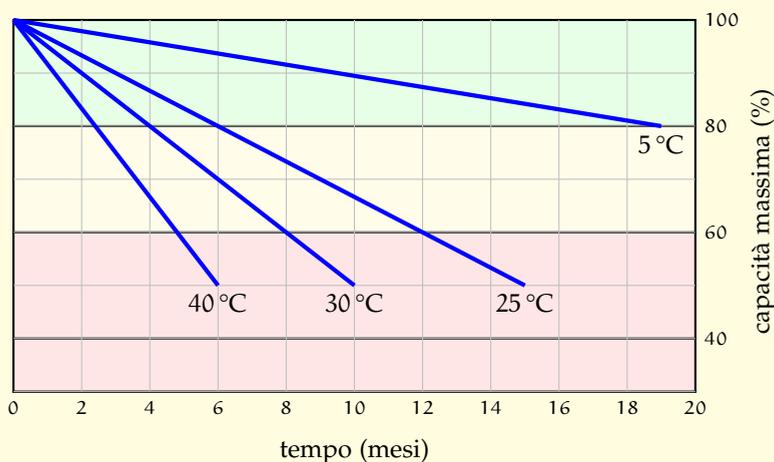
A minore di  $x$  C maggiore di  $x$  B minore di  $1/2$  D negativa

g. La radice quadrata di un numero  $x$  compreso fra 0 e 1 è:

 A minore di  $x$  C maggiore di  $x$  B minore di  $1/2$  D negativa

[Due risposte A, due B, due C e una D]

**12** Per far funzionare gli smartphone e i computer portatili si usano batterie ricaricabili. Col passare del tempo ogni batteria degrada, cioè la sua capacità di fornire energia diminuisce. Il grafico seguente mostra come varia in percentuale nel tempo la capacità di una batteria di fornire energia a diverse temperature.



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

- a. Alla temperatura di 40°C la capacità di una batteria diminuisce circa del 20% nei primi due mesi.  V  F
- b. Una batteria degrada più lentamente se mantenuta a temperature più basse.  V  F
- c. Alla temperatura di 25°C la capacità di una batteria diminuisce dall'80% al 60% in circa tre mesi.  V  F
- d. Dopo 12 mesi, qualunque sia la temperatura, la capacità rimasta di una batteria è meno dell'80%.  V  F
- e. Alla temperatura di 30°C, dopo otto mesi la capacità rimasta di una batteria è meno della metà di quella iniziale.  V  F

[Due affermazioni vere e tre false]